Übungsblatt 6

1. *Zustandsdichte der linearen Kette*

Betrachten Sie eine lineare Kette mit Dispersionsrelation $\omega_k = \gamma\,|\sin(ka/2)|$ ($\gamma^2 = 4\alpha m/M$). Berechnen Sie die Zustandsdichten $G(\omega^2)$ und $g(\omega)$. Bestimmen Sie aus Ihren analytischen Lösungen jeweils das Verhalten an den beiden kritischen Punkten.

2. *Brillouin-Zonen Integration*

Betrachten Sie eine lineare Kette der Länge L mit periodischen Randbedingungen. Welche k-Werte respektieren die periodischen Randbedingungen und wieviele davon liegen in der Brillouin-Zone $(\pi/a, \pi/a]$? Zeigen Sie, dass die k-Punkte äquidistant liegen mit Abstand $\Delta k = 2\pi/La$. Zeichen Sie die k-Punkte für $L = 2$, 3, 4, 8 in die Brillouin-Zone ein. Betrachten Sie nun die Summe $\sum_{i=0}^{L} f(k)\,\Delta k$ für eine beliebige Funktion $f(k)$. Was erhalten Sie im Limes $L \to \infty$?

3. *Bernoulli Zahlen*

Die Bernoulli Zahlen B_n seien definiert durch die Taylorreihe

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, x^n\,. \tag{1}$$

Sie tauchen in vielen verwandten Entwicklungen auf.

i. Zeigen Sie, dass $B_0 = 1$ gilt und B_n für $n > 0$ rekursiv berechnet werden kann aus

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} B_k = 0\,.$$

Hinweis: Multiplizieren Sie (1) mit der Taylorreihe von $e^x - 1$ und führen Sie einen Koeffizientenvergleich für das Produkt der Taylorreihen durch.

ii. Leiten Sie her, dass

$$\frac{x}{2}\coth\frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\, x^{2n} \tag{2}$$

und dass $B_n = 0$ für alle ungeraden $n > 2$.
Hinweis: Zeigen und nutzen Sie $x(1/2 + 1/(e^x - 1)) = x/2\,\coth(x/2)$.

iii. Leiten Sie aus (2) die beiden folgenden Entwicklungen her

$$\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

und

$$\frac{x}{\sin x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2^{2n}-2)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

Hinweis: Zeigen und nutzen Sie $2\cot(2x) = \cot(x) - \tan(x)$ und $\cot(x) + \tan(x/2) = 1/\sin(x)$.

iv. Beweisen Sie die auf Leonard Euler zurückgehende Darstellung

$$\pi x \cot(\pi x) = 1 + 2x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - k^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{x}{x-k} \tag{3}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass beide Seiten der Gleichung holomorphe Funktionen sind mit einfachen Polen an allen ganzzahligen Stellen $x = k \neq 0$ mit den Residuen k sowie mit Nullstellen an allen halbzahligen Stellen $x = a_k := k + 1/2$. Da die Differenz der beiden Seiten eine beschränkte ganze analytische Funktion mit unendlich vielen Nullstellen a_k mit der Eigenschaft $\sum_k 1/|a_k| = \infty$ ist, muss sie nach dem Satz von Blaschke identisch verschwinden.

v. Die Riemannsche Zetafunktion ist durch die Reihe $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^s$ definiert. Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_{2n}}{2(2n)!}$$

Hinweis: Vergleichen Sie die Taylorreihe (2) mit der Taylorentwicklung der Eulerschen Formel (3) unter Benutzung der für $|x| < 1$ konvergenten Reihe

$$\frac{2x^2}{x^2 - k^2} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^{2n} .$$