Übungsblatt 7

1. *Baker-Hausdorff Formel*

Zeigen Sie, dass $e^A\, e^B = e^{A+B}\, e^{[A,B]/2}$ falls A und B mit $[A, B]$ vertauschen (d.h. insbesondere wenn $[A, B]$ eine komplexe Zahl ist):

i. Zeigen Sie zunächst, dass $[A, B]\, e^A = e^A\, [A, B]$.

ii. Entwickeln Sie $f(\alpha) = e^{-\alpha A}\, B\, e^{\alpha A}$ um $\alpha = 0$ und zeigen Sie, dass

$$B\, e^{\alpha A} - e^{\alpha A}\, B = -\alpha[A, B]\, e^{\alpha A} \tag{1}$$

iii. Betrachten Sie die Ableitung der Funktion $g(\alpha) = e^{-\alpha(A+B)}\, e^{\alpha A}\, e^{\alpha B}$ und zeigen Sie, dass $g(\alpha) = e^{\alpha^2[A,B]/2}$. Setzen sie $\alpha = 1$ um die Baker-Hausdorff Formel zu erhalten.

2. *verschobener harmonischer Oszillator*

Betrachten Sie den Hamilton Operator $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - 2\sqrt{2}\gamma\, q)$.

i. Zeigen Sie, dass es sich dabei um einen harmonischen Oszillator mit Ruhelage $q_0 = \sqrt{2}\gamma$ handelt und bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen aus denen des ursprünglichen harmonischen Oszillators ($\gamma = 0$).

ii. Zeigen Sie, dass mit dem Operator $a = (q + ip)/\sqrt{2}$ (mit $[a, a^\dagger] = 1$) gilt $H = a^\dagger a - \gamma(a^\dagger + a) + 1/2$. Führen Sie jetzt den Operator $b = a - \gamma$ ein. Zeigen Sie, dass $[b, b^\dagger] = 1$ und $H = b^\dagger b + 1/2 - \gamma^2$.

iii. Sei $|0\rangle_b$ der Grundzustand des verschobenen und $|0\rangle_a$ der des ursprünglichen harmonischen Oszillators (d.h. $a|0\rangle_a = 0$ und $b|0\rangle_b = 0$). Betrachten Sie den Translationsoperator $T(\sqrt{2}\gamma) = e^{i\sqrt{2}\gamma p}$ und zeigen Sie mittels der Baker-Hausdorff Formel, dass

$$T(\sqrt{2}\gamma)\, |0\rangle_a = e^{-\gamma^2/2} e^{-\gamma a^\dagger} |0\rangle_a\, .$$

Folgern Sie mittels (1), dass $T(\sqrt{2}\gamma)\, |0\rangle_a = |0\rangle_b$.

3. *Bosonische kohärente Zustände*

i. Seien $a^\dagger$ und a bosonische Erzeuger und Vernichter (d.h. $[a, a^\dagger] = 1$). Zeigen Sie, dass der Operator $D(\gamma) = e^{\gamma a^\dagger - \bar{\gamma} a}$ für beliebige komplexe Werte von γ unitär ist.

ii. Die Zustände $|\gamma\rangle := D(\gamma)|0\rangle$ heissen kohärente Zustände. Zeigen Sie, dass $|\gamma\rangle$ Eigenzustand des Vernichters a ist.

iii. Beweisen Sie die Relation

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{i\Im(\bar{\alpha}\beta)}\, D(\alpha + \beta)$$

Interpretieren Sie das Resulat im Lichte von Aufgabe 2.

iv. Seien wie im harmonischen Oszillator $q = (a^\dagger + a)/\sqrt{2}$ und $p = i(a^\dagger - a)/\sqrt{2}$. Zeigen Sie dass

$$D(\gamma) = e^{i\Re(\gamma)\,\Im(\gamma)}\, e^{i\sqrt{2}\Im(\gamma) q}\, e^{-i\sqrt{2}\Re(\gamma) p}$$

sowie

$$q\, e^{-ixp} = e^{-ixp}\,(q + x) \qquad \text{und} \quad p\, e^{iyq} = e^{iyq}\,(p + y)\ .$$