

## Übungsblatt 9

### 1. Variationsrechnung

Sei  $G$  das Funktional einer Funktion  $f(x)$ . Die Funktionalableitung  $\frac{\delta G[f]}{\delta f(x)}$  ist bestimmt ist durch

$$G[f + \delta f] - G[f] = \int dx \frac{\delta G[f]}{\delta f(x)} \delta f(x)$$

Betrachten Sie als Beispiel die Funktionale

$$P[r] = \int_0^{2\pi} d\theta r(\theta) \quad \text{und} \quad A[r] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta r^2(\theta),$$

die Umfang und Fläche von geschlossenen Kurven  $r(\theta)$  in der Ebene liefern.

- i. Bestimmen Sie die Funktionalableitungen  $\frac{\delta P[r]}{\delta r(\theta)}$  und  $\frac{\delta A[r]}{\delta r(\theta)}$ .
- ii. Ein Funktional der Form  $G[f] = \int dx g(f(x))$  heisst *lokal*. Bestimmen Sie die erste und zweite Funktionalableitung von  $G[f]$ .
- iii. Bestimmen Sie die Kurve  $r(\theta)$  der Länge  $l$  mit dem größten Flächeninhalt. Minimieren Sie dazu das Euler-Lagrange Funktional  $A[r] - \mu (P[r] - l)$ .