

Seminar: Quanten- Computing

Ausarbeitung zum Seminarvortrag: Dekohärenz

Michael Fleck

19. Juli 2005

Prof. Müller-Krumbhaar, Dr. E. Koch, Institut für
Festkörperforschung, FZ Jülich

Abgeschlossene quantenmechanische Systeme entwickeln sich kohärent gemäß der Schrödinger Gleichung. In der Praxis stellt sich jedoch heraus, dass die Annahme der Abgeschlossenheit mit zunehmender Größe des Systems immer unhaltbarer wird. Die Theorie der Dekohärenz beschreibt nun Effekte in offenen Quantensystemen, die durch die Ankopplung des Quantensystems an seine Umgebung auftreten.

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der Beschreibung von offenen Quantensystemen ist einfach aber raffiniert. Die Annahme ist, dass das Quantensystem in Wechselwirkung mit einem einfachen Modell für die Umgebung zusammen ein abgeschlossenes System ist. System und Umgebung zusammen entwickeln sich dann gemäß der Schrödinger Gleichung. Durch die Wechselwirkung gehen das Quantensystem und die Umgebung zusammen in einen verschränkten Zustand über. Aus diesem Zustand werden dann die Umgebungsfreiheitsgrade ausintegriert, weil per Definition keine Information über die Umgebungszustände vorliegt.

Die Theorie der Dekohärenz ist zunächst für den klassischen Grenzfall der Quantenmechanik entwickelt worden. Es stellt sich nämlich heraus, dass eben die Verschränkung von System und Umgebung - also ein zutiefst quantenmechanischer Effekt - Ursache dafür ist, dass in der klassischen Physik Superpositionen von Zuständen unterdrückt sind.

Mit Aufkommen des Quanten-Computing hat sich die Bedeutung der Dekohärenzforschung deutlich verschoben. Die Dekohärenz zerstört Superpositionen, und macht aus einem Quanten-Computer einen klassischen Computer. Es ist daher wichtig die Dekohärenzmechanismen zu verstehen, um sie beherrschen zu können.

Contents

1	Einleitung: Schrödingers Katze	2
1.1	Zerfall der Superposition in ein klassisches Ensemble von Alternativen . . .	3
1.2	Auswahl einer der klassischen Alternativen	3
2	Das Problem der Messung	4
2.1	Kopenhagener Interpretation der Messung	4
2.2	Everett Interpretation	4
3	Modell einer quantenmechanischen Messung	5
3.1	QM-Messung nach von Neumann (1932)	5
3.2	Die Frage nach der bevorzugten Basis	7
3.3	Theorie der Messung mit Dekohärenz	8
4	Dekohärenz eines einzelnen Qubits	9
4.1	Qubit in Wechselwirkung mit einem Umgebungsspin	9
4.2	Dekohärenz eines einzelnen Qubits im Spinbad	12
5	Der Klassische Grenzfall der Quantenmechanik	13
5.1	Räumliche Lokalisierung durch Streuung	14
5.2	Bewegungsgleichungen unter dem Einfluß von Streuung	15

1 Einleitung: Schrödingers Katze

Bei dem Gedankenexperiment »Schrödingers Katze« befindet sich eine Katze zusammen mit einem Vergiftungsapparat und einem instabilen Atom in einer Kiste. Die Kiste soll ihr Inneres zunächst vollständig von der Umgebung isolieren. Das Atom soll nur zwei Basiszustände einnehmen können: Einen angeregten Zustand und den Grundzustand. Die Kopplung zwischen Atom, Vergiftungsapparat und Katze sei so gewählt werden, dass der Grundzustand den Vergiftungsapparat aktiviert und die Katze tötet, während der angeregte Basiszustand den Vergiftungsapparat nicht aktiviert und die Katze am Leben lässt.

Das System sei anfangs in einem Produkt aus Basiszuständen:

$$|\psi(0)\rangle = |\text{leben}\rangle_K |\text{inaktiv}\rangle_{VA} |1\rangle_A \quad (1)$$

Atom A im angeregten Basiszustand, Vergiftungsapparat VA inaktiv und Katze K lebendig.

Der angeregte Zustand des Atoms entwickelt sich nach den Zerfallsgesetzen zu einer Superposition beider Basiszustände des Atoms. Die oben beschriebene Kopplung erzeugt dann nach der Zeit t einen Zustandsvektor der Form:

$$|\psi(t)\rangle = a(t) |\text{tot}\rangle_K |0\rangle_A + b(t) |\text{leben}\rangle_K |1\rangle_A \quad (2)$$

Dabei ist der Zustand des Vergiftungsapparates aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mehr mit geschrieben worden.

Nach konsequent quantenmechanischer Interpretation ist die Katze in diesem Zustand gleichzeitig tot und lebendig. Dieser quantenmechanische Zustand kann nicht mit einem klassischen Verständnis¹ interpretiert werden, da Superpositionen nicht in der Erfahrungswelt der klassischen Physik auftauchen.

Als klassischer Beobachter sieht man die Katze entweder tot oder lebendig. Formal bedeutet das, dass der Zustand (2) bei einer Messung in einen seiner Eigenräume projiziert wird. Diese Projektion von der Superposition von Zuständen in einen Eigenraum eines Basiszustandes wollen wir in zwei getrennte Operationen unterteilen:

1. Zerfall der Superposition in ein klassisches Ensemble von Alternativen
2. Auswahl einer der klassischen Alternativen

Die beiden Operationen werden in den folgenden beiden Unterabschnitten beschrieben.

1.1 Zerfall der Superposition in ein klassisches Ensemble von Alternativen

Formal lässt sich der Zerfall der Superposition am besten mit Hilfe der Dichtematrix darstellen: Aus der Dichtematrix des reinen Zustandes $\rho^c = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$ wird ein gemischter Zustand ρ^m :

$$\rho^c = \begin{pmatrix} |a(t)|^2 & a(t)b^*(t) \\ a^*(t)b(t) & |b(t)|^2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \rho^m = \begin{pmatrix} |a(t)|^2 & 0 \\ 0 & |b(t)|^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

dabei sind die Basisvektoren der Matrix wie folgt definiert:

$$|tot\rangle |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |leben\rangle |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ρ^m kann als klassisches Ensemble von Zuständen interpretiert werden: Mit Wahrscheinlichkeit $|a(t)|^2$ ist die Katze nach der Zeit t getötet worden, und mit der Wahrscheinlichkeit $|b(t)|^2$ lebt die Katze zum Zeitpunkt t noch. Im Zustand ρ^m ist die Superposition zerstört, weil die Nichtdiagonalelemente, die Interferenzterme, verschwunden sind.

Der Übergang von ρ^c zu ρ^m wird durch die Theorie der Dekohärenz, also die Ankopplung an die Umgebung, erklärt.

1.2 Auswahl einer der klassischen Alternativen

Nach dem die Superpositionen zerstört sind, wird das System durch ein Ensemble aus zwei alternativen Zuständen beschrieben: eine tote und eine lebende Katze. D.h. die unanschauliche Gleichzeitigkeit ist noch nicht ganz überwunden, und das System befindet sich noch nicht in einem Zustand, der bei einer Einzelmessung gefungen würde. Wird

¹Ein klassisches Verständnis interpretiert Beobachtungen mit Erfahrungen aus der klassischen Physik

der Zustand der Katze gemessen, so ist sie mit der Wahrscheinlichkeit $|a(t)|^2$ tot und mit der Wahrscheinlichkeit $|b(t)|^2$ lebendig. Ist das Ergebniss nun eine tote Katze, so bleibt die Frage was aus der lebendigen Katze geworden ist.

2 Das Problem der Messung

Quantenmechanische Systeme können Superpositions-Zustände einnehmen, aber bei einer Messung des Systems findet man dieses immer nur in einem der Basiszustände. Das Problem der Messung ist die Frage, wie dieser messinduzierte Zerfall der Superpositionen in einen einzelnen Basiszustand zu interpretieren ist.

Das Problem der Messung ist so alt wie die Quantenmechanik selbst, und die beiden wichtigsten, auch heute noch gültigen Interpretationen, wurden lange vor der Entwicklung der Dekohärenztheorie vorgeschlagen. Bevor die Theorie der Dekohärenz aufkam musste ein Interpretationsansatz den gesamten Zerfall von der Superposition in einen einzelnen Basiszustand erklären. Jetzt brauchen gültige Interpretationen nur noch die Auswahl einer der klassischen Alternativen zu erklären.

2.1 Kopenhagener Interpretation der Messung

Nach der Kopenhagener Interpretation, vorgeschlagen 1928 von Niels Bohr, ist dieser Zerfall eine Folge der Wechselwirkung der klassischen Messapparatur mit dem quantenmechanischen System. Diese Interpretation impliziert eine Grenze zwischen der Quantenmechanik und der klassischen Mechanik.

Abgeschlossene Systeme entwickeln sich gemäß der Schrödinger Gleichung, und wenn Systeme dieser Art mit einer klassischen Apparatur untersucht werden, dann kommt es aufgrund der Wechselwirkung zwischen System und klassischem Messapparat zu einer neuen Dynamik, dem Kollaps der Wellenfunktion.

Die experimentelle Herausforderung dieser Interpretation ist die Suche nach einer kollapsartigen Abweichung der Schrödinger Gleichung an der Grenze zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik. Unglücklicherweise sind die Effekte der Dekohärenz gerade so, dass sie wie ein Kollaps aussehen, obwohl die Theorie der Dekohärenz die Schrödinger Gleichung respektiert.

2.2 Everett Interpretation

Die Everert Interpretation, vorgeschlagen von H. Everett 1957, ist sozusagen der zur Kopenhagener Interpretation komplementäre Ansatz. Nach dieser Interpretation gilt die Schrödinger Gleichung immer. Ist nun die Schrödinger Gleichung immer gültig, bleiben nach dem Zerfall der Superpositionen durch Dekohärenz alle übrigen klassischen Alternativen erhalten. Durch die Messung koppelt der Beobachter an das System. Es entsteht für jede klassische Alternative des Systems ein eigener Beobachter. Der für eine spezielle Alternative erzeugte Beobachter hat die subjektive Wahrnehmung, dass nur seine Alternative vom System realisiert wurde.

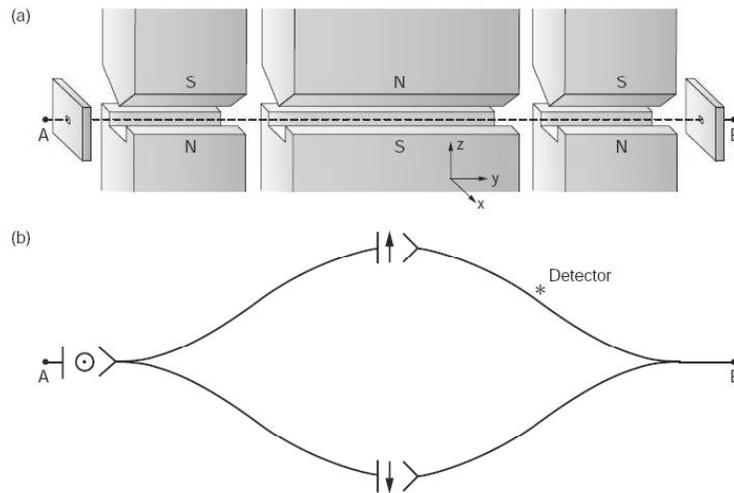


Figure 1: Modell einer quantenmechanischen Messung (aus [3])

Die Struktur der Welt ist damit extrem reichhaltig, denn bei jeder Wechselwirkung zweier Systeme kommt es zu einer Aufspaltung der Realitäten in beliebig vielen Verzweigungen.

3 Modell einer quantenmechanischen Messung

3.1 QM-Messung nach von Neumann (1932)

In diesem Abschnitt soll am Modell einer quantenmechanischen Messung gezeigt werden, wie Dekohärenz den Zerfall der Superpositionen erklärt. Der quantenmechanische Messprozess soll so einfach wie möglich modelliert werden. System und Messapparat seien beide quantenmechanische Qubit-Systeme.

Gedanklich kann man sich das Modell einer einfachen quantenmechanischen Messung wie ein Stern-Gerlach-Experiment vorstellen. Abbildung 1 zeigt einen solchen Aufbau. Ein Spin in einem Superpositions-Zustand aus Spin-up und Spin-down tritt am Punkt A in das Feld eines reversiblen Stern-Gerlach-Magneten ein. Der reversible Stern-Gerlach-Magnet führt zu einer räumlichen Separation der Basiszustände, wie in der Abbildung 1 durch die unterschiedlichen Trajektorien der Spin-up- und Spin-Down-Zustände angedeutet. Am Punkt B kommt es wieder zur Überlagerung, sodass bei ungestörtem Durchgang des Spins durch den reversiblen Stern-Gerlach-Magneten der Superpositions-zustand erhalten bleibt.

Nahe der Trajektorie des Spin-up-Basiszustandes soll nun ein Qubit-Detektor stehen, der nur mit Spin-up-Basiszuständen wechselwirkt. Der Qubit-Detektor kann die Basiszustände Zeiger-rauf und Zeiger-runter einnehmen, und sei anfangs im Zustand Zeiger-runter. Tritt nun ein Spin-up in Wechselwirkung mit dem Detektor, so flippt

der Zeiger des Detektors, und der Spin-up-Zustand bleibt erhalten. Formal kann die Wechselwirkung zwischen Spin und Detektor wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle &\mapsto |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle \\ |\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle &\mapsto |\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle \end{aligned} \quad (4)$$

Das System sei anfangs in folgendem Produktzustand:

$$|\phi^i\rangle = |\psi\rangle |A_{\downarrow}\rangle = (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) |A_{\downarrow}\rangle \quad (5)$$

Dabei ist $|\psi\rangle$ ein beliebiger Spin-System-Zustand. Unter der Wirkung der oben beschriebenen Wechselwirkung entwickelt sich das System in folgenden korrelierten Endzustand:

$$|\phi^c\rangle = \alpha |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle + \beta |\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle \quad (6)$$

Die Dichtematrix dieses korrelierten Endzustandes sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \rho^c &= |\phi^c\rangle \langle \phi^c| \\ &= (\alpha |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle + \beta |\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle) (\alpha^* \langle \uparrow| \langle A_{\uparrow}| + \beta^* \langle \downarrow| \langle A_{\downarrow}|) \\ &= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| |A_{\uparrow}\rangle \langle A_{\uparrow}| + \alpha\beta^* |\uparrow\rangle \langle \downarrow| |A_{\uparrow}\rangle \langle A_{\downarrow}| \\ &\quad + \alpha^*\beta |\downarrow\rangle \langle \uparrow| |A_{\downarrow}\rangle \langle A_{\uparrow}| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| |A_{\downarrow}\rangle \langle A_{\downarrow}| \\ &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Weil der Anfangszustand eine Superposition war, hat die Dichtematrix nicht verschwindende Interferenzterme, und Spin-System und der Detektor befinden sich in einem verschränkten Zustand.

Wird nun die Information des Detektors ausgelesen, so findet man diesen mit Wahrscheinlichkeit $|\alpha|^2$ im Zustand Zeiger-rauf, was bedeutet, dass das Spin-System im Zustand Spin-up war, und mit Wahrscheinlichkeit $|\beta|^2$ im Zustand Zeiger-runter, was bedeutet, dass das Spin-System im Zustand Spin-down war. Man wird ihn nie in einem Superpositions-Zustand aus Zeiger-rauf und Zeiger-runter finden. Das bedeutet aber, dass die Dichtematrix (7) das Messergebniss noch nicht richtig beschreibt.

Außerdem wird mit Zugriff auf die Informationen des Detektors der Superpositions-Zustand des Spins-Systems zerstört. Das äußert sich in einer direkten Messung des Spin-Systems am Ausgang B.

Dessen war sich auch J. von Neumann bewusst, der 1932 als erster eine solche quantenmechanische Messung vorstellte. Um die Theorie der Mesung zu vervollständigen postulierte er an dieser Stelle einen nichtunitären »Prozess 1«, der bei der Auslesung der Informationen des Detektors aus der Dichtematrix (7) die Diagonalmatrix (8) erzeugt:

$$\rho^d = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \langle \downarrow| \langle A_{\downarrow}| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

3.2 Die Frage nach der bevorzugten Basis

Das Postulat eines solchen Prozesses ist nicht ganz unproblematisch, denn war die Dichtematrix (7) noch basisunabhängig, so ist die Bildung der Diagonalmatrix (8) nicht mehr unabhängig von der gewählten Basis.

In der oben gewählten z-Basis erzeugt die Wechselwirkung zwischen System und Apparat bei Spin-up einen Zeiger-Flipp, und bei Spin-down keine Veränderung des Zeigers. Die Basiszustände verändern sich unter der Wechselwirkung zwischen System und Apparat in folgender bereits genannter Weise:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle |A_{\uparrow\downarrow}\rangle &\mapsto |\uparrow\rangle |A_{\downarrow\uparrow}\rangle \\ |\downarrow\rangle |A_{\uparrow\downarrow}\rangle &\mapsto |\downarrow\rangle |A_{\uparrow\downarrow}\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

Wählen wir an statt der z-Basis die konjugierte x-Basis:

$$\begin{aligned} |\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle \pm |\uparrow\rangle) \\ |A_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|A_{\downarrow}\rangle \pm |A_{\uparrow}\rangle) \end{aligned} \quad (10)$$

So verändert sich auch die Form der Wechselwirkung in dieser Basis:

$$\begin{aligned} |\pm\rangle |A_{+}\rangle &= \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle \pm |\uparrow\rangle) (|A_{\downarrow}\rangle + |A_{\uparrow}\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle \pm |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle + |\downarrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle \pm |\uparrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle) \\ \hookrightarrow &= \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle \pm |\uparrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle + |\downarrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle \pm |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle \pm |\uparrow\rangle) (|A_{\downarrow}\rangle + |A_{\uparrow}\rangle) = |\pm\rangle |A_{+}\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |\pm\rangle |A_{-}\rangle &= \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle \pm |\uparrow\rangle) (|A_{\downarrow}\rangle - |A_{\uparrow}\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle \mp |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle - |\downarrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle \pm |\uparrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle) \\ \hookrightarrow &= \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle \mp |\uparrow\rangle |A_{\downarrow}\rangle - |\downarrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle \pm |\uparrow\rangle |A_{\uparrow}\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|\downarrow\rangle \mp |\uparrow\rangle) (|A_{\downarrow}\rangle - |A_{\uparrow}\rangle) = |\mp\rangle |A_{-}\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

Die Basiszustände der konjugierten Basis verändern sich also unter der Wechselwirkung wie folgt:

$$\begin{aligned} |\pm\rangle |A_{-}\rangle &\mapsto |\mp\rangle |A_{-}\rangle \\ |\pm\rangle |A_{+}\rangle &\mapsto |\pm\rangle |A_{+}\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

In dieser Basis misst das Spin-System die Phase des Detektors, und es scheint als ob sich die Messinformation in die entgegengesetzte Richtung bewegt. Bis zu dieser Stelle

ist der nichtunitären Prozess 1 noch nicht in Erscheinung getreten. D.h. diese etwas seltsame Ungewissheit wer hier eigentlich was misst ist eigentlich nur Ausdruck der Basisunbestimmtheit der Quantenmechanik. Mit der Bildung geeigneter Superpositionen lässt sich (9) jederzeit in (13) um schreiben.

Sobald aber der nichtunitäre Prozess 1 in einer der beiden Basen ausführt wird, sind alle Superpositionen zerstört, und die Wahrheitstabellen (9) und (13) sind nicht mehr äquivalent.

Die Frage ist also in welcher Basis muss der »Prozess 1« ausgeführt werden. Diese Antwort kann ein Postulat natürlich nicht liefern. Glücklicherweise kann die Theorie der Dekohärenz den Prozess 1 als Folge der Verschränkung mit der Umgebung erklären, und damit auch die Frage nach der bevorzugten Basis klären.

3.3 Theorie der Messung mit Dekohärenz

Zur Vervollständigung der Theorie der Messung soll die Umgebung möglichst einfach modelliert werden. Wir nehmen daher an, dass die Umgebung auch ein Qubit-System ist.

Die Wechselwirkung zwischen quantenmechanischem Apparat und der Umgebung sei analog zu der Wechselwirkung zwischen Spin und Apparat. Die Umgebung sei anfangs im Zustand $|E_1\rangle$. Befindet sich der Apparat im Zustand $|A_\uparrow\rangle$, so verändert sich der Zustand der Umgebung in den Zustand $|E_2\rangle$, befindet sich der Apparat hingegen im Zustand $|A_\downarrow\rangle$, so verändert sich der Zustand der Umgebung nicht. Das drei Qubit-System bestehend aus Spin-System, Messapparat und Umgebung starte in dem folgenden Produktzustand:

$$|\phi^i\rangle |E_1\rangle = |\psi\rangle |A_\downarrow\rangle |E_1\rangle = (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) |A_\downarrow\rangle |E_1\rangle \quad (14)$$

Dieser Zustand entwickelt sich dann unter den Wechselwirkungen zwischen Spin-System und Apparat sowie Apparat und Umgebung in folgenden korrelierten Endzustand:

$$|\Psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle |A_\uparrow\rangle |E_2\rangle + \beta |\downarrow\rangle |A_\downarrow\rangle |E_1\rangle \quad (15)$$

In diesem Zustand ist das System Spin und Apparat mit der Umgebung verschränkt. Die Dichtematrix dieses Zustandes hat dann die folgende Form:

$$\begin{aligned} \rho^c &= |\Psi\rangle \langle\Psi| \\ &= (\alpha |\uparrow\rangle |A_\uparrow\rangle |E_2\rangle + \beta |\downarrow\rangle |A_\downarrow\rangle |E_1\rangle) (\alpha^* \langle\uparrow| \langle A_\uparrow| \langle E_2| + \beta^* \langle\downarrow| \langle A_\downarrow| \langle E_1|) \\ &= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle\uparrow| |A_\uparrow\rangle \langle A_\uparrow| |E_2\rangle \langle E_2| + \alpha\beta^* |\uparrow\rangle \langle\downarrow| |A_\uparrow\rangle \langle A_\downarrow| |E_2\rangle \langle E_1| \\ &\quad + \alpha^*\beta |\downarrow\rangle \langle\uparrow| |A_\downarrow\rangle \langle A_\uparrow| |E_1\rangle \langle E_2| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle\downarrow| |A_\downarrow\rangle \langle A_\downarrow| |E_1\rangle \langle E_1| \\ &= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } |\uparrow\rangle |A_\uparrow\rangle |E_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |\downarrow\rangle |A_\downarrow\rangle |E_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16) \end{aligned}$$

Über den Zustand der Umgebung existiert keinerlei Kenntniss. D.h. die Umgebungsfreiheitsgrade müssen ausintegriert werden. In diesem Fall bedeutet das, dass wir die

parzielle Spur über die Umgebungszustände bilden müssen. Es ergibt sich dann die reduzierte Dichtmatrix:

$$\begin{aligned}\rho_r &= \text{Tr}_E |\Psi\rangle \langle \Psi| \\ &= \sum_i \langle E_i | \Psi \rangle \langle \Psi | E_i \rangle \quad \text{falls } \langle E_i | E_j \rangle = \delta_{ij}\end{aligned}\quad (17)$$

$$= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| |A_\uparrow\rangle \langle A_\uparrow| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| |A_\downarrow\rangle \langle A_\downarrow| \quad (18)$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } |\uparrow\rangle |A_\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |\downarrow\rangle |A_\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Es ergibt sich also automatisch durch die Verschränkung mit der Umgebung die Diagonalmatrix (8), und das Postulat des Prozesses 1 ist mit der Theorie der Dekohärenz nicht mehr notwendig. Die Bedingung (17) orthogonaler Umgebungszustände ist wichtig, denn für nicht orthogonale Zustände würden die Interferenzterme in der reduzierten Dichtematrix nicht verschwinden, wie wir bei der Berechnung der Dekohärenz eines einzelnen Qubits in Abschnitt 4 noch sehen werden. Die Annahme orthogonaler Zustände ist durchaus gerechtfertigt, denn die Umgebung besteht im Allgemeinen aus einer sehr großen Zahl von Freiheitsgraden. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand $|A_\uparrow\rangle$ mit nicht verschwindender Amplitude an den selben Umgebungszustand wie der Zustand $|A_\downarrow\rangle$ koppelt, sehr gering. (siehe Abschnitt 4)

Die Frage nach der ausgezeichneten Basis wird durch die Wechselwirkung zwischen Apparat und Umgebung beantwortet. Hier wurde die Wechselwirkung in der gewohnten z -Basis definiert, und als Folge davon ist die reduzierte Dichtematrix diagonal in der z -Basis.

Im Allgemeinen sind Wechselwirkungen eines Systems mit der Umgebung Streuprozesse durch Streuteilchen wie Photonen oder Luftmoleküle. Nach der Streutheorie sind Streuprozesse lokal, was Ursache dafür ist, dass insbesondere in größeren Systemen die Ortsbasis gegenüber der Impulsbasis ausgezeichnet ist.

4 Dekohärenz eines einzelnen Qubits

In diesem Abschnitt soll die Zeitentwicklung eines einzelnen Qubits in Wechselwirkung mit seiner Umgebung berechnet werden. Anschließend soll die reduzierte Dichtematrix des verschränkten Zustandes gebildet werden. Die Rechnung wird zunächst durch das sehr grobe Modell eines Qubits in Wechselwirkung mit einem einzelnen Umgebungsspin (Abschnitt 4.1) erläutert. In Abschnitt 4.2 wird die Umgebung vergrößert, um das Dekohärenzmodell zu verbessern. Das hier dargestellte Modell der Dekohärenz eines einzelnen Qubits ist nach einer Rechnung von W. H. Zurek in [4] (siehe auch [2] Abschnitt VI A. 1.).

4.1 Qubit in Wechselwirkung mit einem Umgebungsspin

Bertachten wir allerdings zunächst eine zwei Qubit-Anordnung, bestehend aus einem zentralen Spin mit den Basiszuständen $\{|\uparrow\rangle; |\downarrow\rangle\}$ und einem Umgebungsspin mit den

Basiszuständen $\{|\uparrow\rangle; |\downarrow\rangle\}$. Der Hamiltonian des Systems habe die folgende Form:

$$\begin{aligned}
H_{int} &= g(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \\
&= \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{20}$$

Dabei ist g die Kopplungskonstante. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist der Hamilton-Operator in Matrix-Darstellung geschrieben worden. Dabei sind die Basisvektoren wie folgt definiert worden:

$$|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Der Anfangszustand sei ein beliebiger Produktzustand:

$$\begin{aligned}
|\Phi(0)\rangle &= (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) \otimes (A|\uparrow\rangle + B|\downarrow\rangle) \\
&= \alpha A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

Das Gesamtsystem Spin und Umgebung sei Abgeschlossen, d.h. die Zeitentwicklung $|\Phi(t)\rangle$ des Zustandes $|\Phi(0)\rangle$ ergibt sich durch Anwendung des Zeitentwicklungsoperators zu (wobei $\hbar = 1$):

$$\begin{aligned}
|\Phi(t)\rangle &= \exp\{-iH_{int}t\} |\Phi(0)\rangle \\
&= \begin{pmatrix} e^{-igt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{igt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{igt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-igt} \end{pmatrix} |\Phi(0)\rangle \\
&= \alpha A e^{-igt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha B e^{igt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta A e^{igt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta B e^{-igt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \alpha A e^{-igt} |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha B e^{igt} |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle \\
&\quad + \beta A e^{igt} |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \beta B e^{-igt} |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle \\
&= \alpha |\uparrow\rangle (A e^{-igt} |\uparrow\rangle + B e^{igt} |\downarrow\rangle) + \beta |\downarrow\rangle (A e^{igt} |\uparrow\rangle + B e^{-igt} |\downarrow\rangle) \\
&= \alpha |\uparrow\rangle |E_{\uparrow}(t)\rangle + \beta |\downarrow\rangle |E_{\downarrow}(t)\rangle
\end{aligned} \tag{23}$$

Dabei sind die Umgebungszustände $\{|E_{\uparrow}(t)\rangle; |E_{\downarrow}(t)\rangle\}$ die Zustände, die an die Basiszustände $\{|\uparrow\rangle; |\downarrow\rangle\}$ des zentralen Spins ankoppeln. Die Dichtematrix des zeitentwickelten Zustandes sieht mit den Umgebungszuständen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\rho &= |\Phi(t)\rangle \langle \Phi(t)| \\
&= (\alpha |\uparrow\rangle |E_{\uparrow}(t)\rangle + \beta |\downarrow\rangle |E_{\downarrow}(t)\rangle) (\alpha^* \langle \uparrow| \langle E_{\uparrow}(t)| + \beta^* \langle \downarrow| \langle E_{\downarrow}(t)|) \\
&= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \langle E_{\uparrow}(t)| \langle E_{\uparrow}(t)| + \alpha\beta^* |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \langle E_{\uparrow}(t)| \langle E_{\downarrow}(t)| \\
&\quad + \alpha^*\beta |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \langle E_{\downarrow}(t)| \langle E_{\uparrow}(t)| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \langle E_{\downarrow}(t)| \langle E_{\downarrow}(t)|
\end{aligned} \tag{24}$$

Die reduzierte Dichtematrix errechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
\rho_r &= Tr_E |\Phi(t)\rangle \langle \Phi(t)| \\
&= \sum_i \langle i | \Phi(t)\rangle \langle \Phi(t) | i \rangle \quad \langle j | i \rangle = \delta_{ij} \\
&= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \sum_i \langle i | E_{\uparrow}(t)\rangle \langle E_{\uparrow}(t) | i \rangle + \alpha\beta^* |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \sum_i \langle i | E_{\uparrow}(t)\rangle \langle E_{\downarrow}(t) | i \rangle \\
&\quad + \alpha^*\beta |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \sum_i \langle i | E_{\downarrow}(t)\rangle \langle E_{\uparrow}(t) | i \rangle + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \sum_i \langle i | E_{\downarrow}(t)\rangle \langle E_{\downarrow}(t) | i \rangle \\
&= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \langle E_{\uparrow}(t) | E_{\uparrow}(t)\rangle + \alpha\beta^* |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \langle E_{\downarrow}(t) | E_{\uparrow}(t)\rangle \\
&\quad + \alpha^*\beta |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \langle E_{\uparrow}(t) | E_{\downarrow}(t)\rangle + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \langle E_{\downarrow}(t) | E_{\downarrow}(t)\rangle \\
&= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + \alpha\beta^* |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \langle E_{\downarrow}(t) | E_{\uparrow}(t)\rangle \\
&\quad + \alpha^*\beta |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \langle E_{\uparrow}(t) | E_{\downarrow}(t)\rangle + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \\
&= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \langle E_{\downarrow}(t) | E_{\uparrow}(t)\rangle \\ \alpha^*\beta \langle E_{\uparrow}(t) | E_{\downarrow}(t)\rangle & |\beta|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{25}$$

Für das Skalarprodukt $r(t)$ der beiden Umgebungszustände ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned}
r(t) &= \langle E_{\uparrow}(t) | E_{\downarrow}(t)\rangle \\
&= (A^* e^{igt} \langle \uparrow| + B^* e^{-igt} \langle \downarrow|) (A e^{-igt} |\uparrow\rangle + B e^{igt} |\downarrow\rangle) \\
&= |A|^2 e^{i2gt} + |B|^2 e^{-i2gt}
\end{aligned} \tag{26}$$

$$= \cos(2gt) + i (|A|^2 - |B|^2) \sin(2gt) \tag{27}$$

Der Betrag von $r(t)$ ergibt sich zu:

$$|r(t)|^2 = \cos^2(2gt) + (|A|^2 - |B|^2)^2 \sin^2(2gt)$$

Das Skalarprodukt $r(t)$ der beiden Umgebungszustände ist ein zeitlich oszillierender Faktor mit $|r(t)| \leq 1$. Die Periodische Zeitabhängigkeit ist Ausdruck der Poincaré'schen Wiederkehrzeit. Mit Zunahme der Anzahl Freiheitsgrade wird die Poincaré'schen Wiederkehrzeit vergrößert. D.h. um zu brauchbaren Resultaten zu kommen muss das System, und in diesem Fall speziell die Umgebung vergrößert werden.

4.2 Dekohärenz eines einzelnen Qubits im Spinbad

Die Berechnung der Dekohärenz eines einzelnen Qubits im Spinbad geht ganz analog zur Berechnung der Dekohärenz eines einzelnen Qubits in Wechselwirkung mit nur einem Umgebungsspin. Der Hamiltonian des Systems habe jetzt die folgende Form:

$$H_{int} = (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \otimes \sum_{k=1}^N g_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \mathbf{1}_i \otimes (|\uparrow_k\rangle\langle\uparrow_k| - |\downarrow_k\rangle\langle\downarrow_k|) \quad (28)$$

Die Kopplungskonstanten g_k seien alle verschieden, und die Umgebungsspins wechselwirken nur mit dem zentralen Spin, nicht untereinander. Der Anfangszustand sei analog zu (22) ein beliebiger Produktzustand:

$$|\Phi(0)\rangle = (\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle) \prod_{k=1}^N (A_k |\uparrow_k\rangle + B_k |\downarrow_k\rangle) \quad (29)$$

Für den zeitentwickelten Zustand

$$|\Phi(t)\rangle = \alpha |\uparrow\rangle |E_{\uparrow}(t)\rangle + \beta |\downarrow\rangle |E_{\downarrow}(t)\rangle \quad (30)$$

lassen sich wie in (23) Umgebungszustände definieren. Für die Umgebungszustände ergibt sich:

$$|E_{\uparrow}(t)\rangle = \prod_{k=1}^N (A_k e^{ig_k t} |\uparrow_k\rangle + B_k e^{-ig_k t} |\downarrow_k\rangle) = |E_{\downarrow}(-t)\rangle \quad (31)$$

Mit der Definition der Umgebungszustände ergibt sich für die Dekohärenz eines einzelnen Qubit im Spinbad formal die gleiche reduzierte Dichtmatrix wie bei der Dekohärenz eines einzelnen Qubits in Wechselwirkung mit nur einem Umgebungsspin (25):

$$\rho_r = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \langle E_{\downarrow}(t) | E_{\uparrow}(t) \rangle \\ \alpha^* \beta \langle E_{\uparrow}(t) | E_{\downarrow}(t) \rangle & |\beta|^2 \end{pmatrix} \text{ mit } |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Dabei ergibt sich für das Skalarprodukt der beiden Umgebungszustände:

$$\begin{aligned} r(t) &= \langle E_{\uparrow}(t) | E_{\downarrow}(t) \rangle \\ &= \prod_{k=1}^N (|A_k|^2 e^{i2g_k t} + |B_k|^2 e^{-i2g_k t}) \end{aligned} \quad (33)$$

Dieses Produkt soll nun ausmultipliziert werden. Um die entstehende Summe formal darstellen zu können benötigen wir eine Basis bestehend aus 2^N Zuständen für alle Umgebungszustände. Wähle die Basis $\{|j\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle \otimes \dots \otimes |\uparrow_N\rangle\}$ wobei j alle möglichen Spinkombinationen durchnummeriert. Damit ergibt sich für $r(t)$:

$$r(t) = \sum_{j=1}^{2^N} p_j \exp\{-i2\omega_j t\} \quad (34)$$

Dabei sind die $p_j = |\langle j | E(t=0) \rangle|^2$ Übergangswahrscheinlichkeiten vom Anfangszustand $|E(0)\rangle$ der Umgebung in den j -ten Basiszustand $|j\rangle$ und die $\omega_j = \langle \uparrow | \langle j | H_{int} | j \rangle | \uparrow \rangle$ sind die Eigenwerte des Hamilton-Operators zum j -ten Basiszustand². Das Betragsquadrat von $r(t)$ ist:

$$|r(t)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2^N} p_i p_j \cos \{2(\omega_i - \omega_j)t\} \quad (35)$$

Bilde den zeitlichen Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \langle |r(t)|^2 \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |r(t)|^2 dt \\ &= \sum_{j=1}^{2^N} p_j^2 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2^N} p_i p_j \cos \{2(\omega_i - \omega_j)t\} dt \\ &= \sum_{j=1}^{2^N} p_j^2 \\ &= \prod_{k=1}^N (A_k^4 + B_k^4) \end{aligned} \quad (36)$$

Da $A_k^4 + B_k^4 < 1$, wegen der Normierung, ist der zeitliche Erwartungswert für große N exponentiell klein. Die Dekohärenz ist mit wachsender Anzahl von Freiheitsgraden exponentiell effektiv, und nur die Basiszustände $\{|\uparrow\rangle; |\downarrow\rangle\}$ der Wechselwirkung sind invariant unter Dekohärenz.

5 Der Klassische Grenzfall der Quantenmechanik

Damit die klassische Physik im klassischen Grenzfall aus der Quantenmechanik hervorgehen kann müssen zwei Bedingungen für die Objekte³ der Quantenmechanik und der klassischen Mechanik erfüllt sein:

1. Dynamischer Grenzfall: Die Objekte müssen im Grenzfall der gleichen Dynamik gehorchen
2. Kinematische Grenzfall: Die Beschreibung der Objekte muss im Grenzfall in einander übergehen.

Der dynamische Grenzfall ist durch das Ehrenfest-Theorem beschrieben, und wird an dieser Stelle nicht weiter diskutiert. Der Kinematische Grenzfall ist die Frage, wie aus

²Der Hamiltonian ist in der j -Basis diagonal

³Das Objekt der Quantenmechanik ist die Wellenfunktion, und Objekt der klassischen Mechanik ist der Massenpunkt.

einer quantenmechanischen Wellenfunktion im Hilbertraum ein Massenpunkt im klassischen Phasenraum werden kann. Auch wenn der Massenpunkt auf Grund der Unschärferelation mit der Quantenmechanik überhaupt nicht verträglich ist, so kann er doch durch ein Gaußsches Wellenpaket angenähert werden. Das Zentrale Problem, was aber dann immernoch bleibt, ist die bereits gestellte Frage: Warum tauchen in der klassischen Physik keine Superpositionen von Zuständen auf? Diese Frage ist prinzipiell so alt wie die Quantenmechanik. Albert Einstein hat sie z.B. so formuliert:

»Man muß sich schon wundern, dass eine Fliege, die man zum ersten mal sieht, so etwas wie lokalisiert erscheint«

Mit der Theorie der Dekohärenz ist nun ein entscheidender Schritt zur Beantwortung dieser Frage getan.

5.1 Räumliche Lokalisierung durch Streuung

Alle makroskopischen Objekte erscheinen immer wohllokalisiert im gewöhnlichen Raum und nicht etwa im Impulsraum. Diese Auszeichnung der Ortsbasis gegenüber der Impulsbasis ist nicht verständlich, wenn man das Objekt als abgeschlossenes Quantensystem betrachtet, denn in der Quantenmechanik gibt es keine ausgezeichnete Basis.

Gerade bei großen Objekten sind Streuprozesse von Umgebungsteilchen am Objekt extrem häufig und daher nicht zu vernachlässigen. Die Streutheorie sagt, dass der Zustand eines gestreuten Teilchens vom Ort x des Streuzentrums abhängt. Damit »misst« das Streuteilchen die Position des Streuzentrums. In erster Näherung kann der Rückstoß vernachlässigt werden, sodass ein einzelner Streuprozess mit Streuzentrum am Ort x analog zum von Neumann-Schema, also gemäß

$$|x\rangle |\Phi_0\rangle \rightarrow |x\rangle |\Phi_x\rangle \quad (37)$$

abläuft. Dabei ist $|\Phi_x\rangle$ der Zustand des Streuteilchens, der Informationen über den Ort der Streuzentren besitzt. Der Zustand $|x\rangle |\Phi_x\rangle$ ist ein verschränkter Zustand. Die Verschränkung äußert sich in der gegenseitigen Information. Bildung der reduzierten Dichtematrix bedeutet in diesem Fall, dass mit jedem Streuprozess die Dichtematrix mit einem Faktor multipliziert wird, der durch das Skalarprodukt der entsprechenden Streuzustände $|\Phi_x\rangle$ und $|\Phi_{x'}\rangle$ gegeben ist,

$$\rho(x, x') \rightarrow \rho(x, x') \langle \Phi_{x'} | \Phi_x \rangle \quad (38)$$

Dieser Faktor ist nahezu null, falls die Wellenlänge des streuenden Teilchens kleiner ist als die betrachtete Distanz $|x - x'|$

$$\langle \Phi_{x'} | \Phi_x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } |x - x'| \gg \lambda \\ 1 - O[(x - x')^2] & \text{falls } |x - x'| \ll \lambda \end{cases} \quad (39)$$

Der Fall zwei, wo das Skalarprodukt der beiden Streuzustände ein kontrahierender Faktor ist, ist von besonderem Interesse, da er ermöglicht eine Dekohärenzzeit zu definieren.

	a = 10 ⁻³ cm Staubkorn	a = 10 ⁻⁵ cm Staubkorn	a = 10 ⁻⁶ cm Großes Molekül
Kosmische Hintergrundstrahlung	10 ⁶	10 ⁻⁶	10 ⁻¹²
300K – Photonen	10 ¹⁹	10 ¹²	10 ⁶
Sonnenlicht	10 ²¹	10 ¹⁷	10 ¹³
Luftmoleküle	10 ³⁶	10 ³²	10 ³⁰
Laborvakuum	10 ²¹	10 ¹⁹	10 ¹⁷

Table 1: Lokalisierungsrate Λ in $cm^{-2}s^{-1}$ für verschieden große »Staubkörner« und verschiedene Streuprozesse. (aus [1])

Finden nämlich viele solcher Streuprozesse statt, so ergibt die Bildung der reduzierten Dichtematrix eine exponentielle Dämpfung der Kohärenz:

$$\rho(x, x', t) = \rho(x, x', 0) \exp \{ -\Lambda t(x - x')^2 \} \quad (40)$$

Dabei ist die »Lokalisierungsrate« Λ gegeben durch:

$$\Lambda = \frac{k^2 \sigma_{eff} N v}{8\pi V} \quad (41)$$

Hier ist k die Wellenzahl des einlaufenden Teilchens, σ_{eff} von der Größenordnung des totalen Streuquerschnitts und Nv/V die Flussdichte der Streuteilchen. Mit der Lokalisierungsrate wird das Auftreten von Superpositionen zu einer quantitativen Frage. In Tabelle 1 sind die Lokalisierungsraten für verschieden große »Staubkörner« und verschiedene Streuprozesse berechnet. Besonders effizient ist die Streuung von Luftmolekülen aufgrund ihrer kleinen de-Broglie Wellenlänge. Es ist auch zu sehen, dass selbst in einem Laborvakuum Streuungen von Luftteilchen ein »Staubkorn« immer lokalisiert erscheinen lassen.

5.2 Bewegungsgleichungen unter dem Einfluß von Streuung

Die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix eines Staubkorns ergibt sich näherungsweise als Kombination der von Neumann Gleichung mit Zusatztermen die den Einfluss der Streuprozesse beschreiben.

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H_{int}, \rho] + \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\text{Streuung}} \quad (42)$$

Der für größere Objekte wesentliche Anteil ist das exponentielle Abklingen der Kohärenz zwischen verschiedenen Orten. Für ein »freies« Teilchen ist $H_{int} = p^2/2m$ und für eine Raumdimension lautet die Bewegungsgleichung dann explizit ($\hbar = 1$):

$$i \frac{\partial \rho(x, x', t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \rho - i\Lambda(x - x')^2 \rho \quad (43)$$

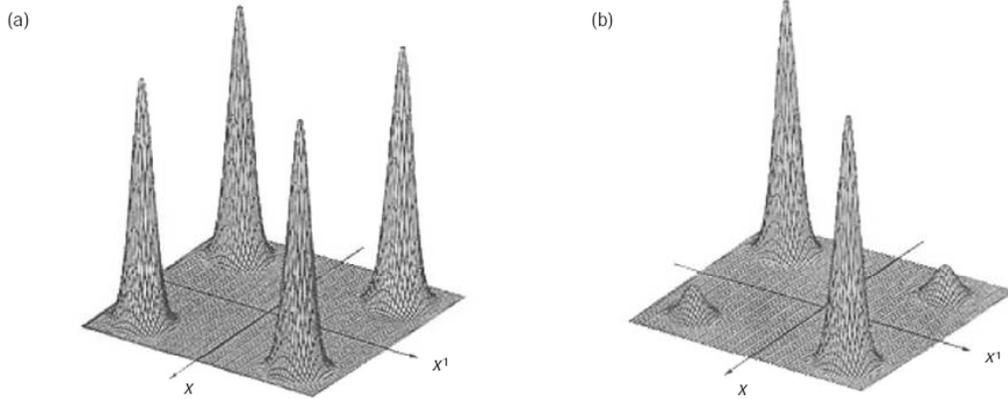


Figure 2: Dichtematrix einer Superposition zweier gaussischer Wellenpakete mit Abstand Δx und Breite dx . (aus [3])

Erweiterte Modelle, die auch den Rückstoß bei der Streuung berücksichtigen («Quantum Brownian Motion») liefern kompliziertere Gleichungen, wie z.B. die folgende Master Gleichung im Hochtemperatur-Limit:

$$i \frac{\partial \rho(x, x', t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - i\Lambda(x - x')^2 + i\gamma(x - x') \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \rho(x, x', t) \quad (44)$$

Mit dieser Gleichung kann man sehr schön den Unterschied zwischen Dekohärenz (Λ -Term) und Dissipation (γ -Term) diskutieren. Im Makroskopischen ist Dekohärenz bei weitem effektiver als Dissipation. Für das Verhältnis von Dekohärenz zu Reibung ergibt sich:

$$\frac{\text{Dekohärenz}}{\text{Reibung}} = \frac{\Lambda}{\Gamma} \Delta x^2$$

In einfachen Modellen ist $\Lambda = m\gamma k_B T / \hbar^2$. Damit ergibt sich für das Verhältnis:

$$\frac{\text{Dekohärenz}}{\text{Reibung}} = \frac{2mk_B T}{\hbar^2} \rightarrow 10^{40} \quad (45)$$

Mit Hilfe sogenannter Schrödinger-Cat-States soll nun gezeigt werden, was die Mastergleichung (44) mit Superpositionen macht. Der Schrödinger-Cat-Zustand ist eine Überlagerung von zwei Gaussischen Wellenpaketen mit Abstand Δx und Breite dx .

$$\begin{aligned} \rho(x, x') &= \frac{1}{2} [\chi^-(x)\chi^+(x') + \chi^+(x)\chi^-(x') + \chi^+(x)\chi^+(x') + \chi^-(x)\chi^-(x')] \\ \chi^\pm(x) &= \langle x | \pm \rangle \sim \exp \left\{ -\frac{(x \pm \Delta x)^2}{4dx^2} \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

Die Dichtematrix (46) ist in Abbildung 2 (a) für die Zeit $t = 0$ und (b) für einen späteren Zeitpunkt dargestellt. Man sieht deutlich wie die Interferenzterme zum späteren Zeitpunkt gedämpft sind, während die Diagonalterme fast unbeeinflusst sind.

References

- [1] J. Audretsch, 2002, Verschränkte Welt, Verlag WILEY-VCH, ISBN 3-527-29472-4, Kapitel 8: »Dekohärenz und der Übergang von der Quantenphysik zur klassischen Physik«
- [2] W.H. Zurek, 2003, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical, Rev. Mod. Phys. Vol. 75, Page 715-775
- [3] W.H. Zurek, 2002, Decoherence and the Transition from Quantum to Classical - Revisited, Los Alamos Science Number 27
- [4] W.H. Zurek, 1982, Environment-induced superselection rules, Phys. Rev. D Vol 26, Page 1862.