Dekohärenz

Seminar: Quanten-Computing
Michael Fleck

Prof. H. Müller- Krumbhaar, Dr. E. Koch
Institut für Festkörperforschung, FZ Jülich

Inhalt

- Schrödingers Katze
- Das Problem der Messung
- Modell einer QM- Messung
- Dekohärenz eines einzelnen Qubits
- Klassischer Grenzfall der Quanten Mechanik

Schrödingers Katze

- Abgeschlossenes System: Katze, Vergiftungsapparat gekoppelt an instabiles Atom
- Atom zerfallen $\rightarrow$ Katze vergiftet
- Anfangszustand:

$$\left|\psi\right\rangle = \left|leben\right\rangle\left|1\right\rangle$$

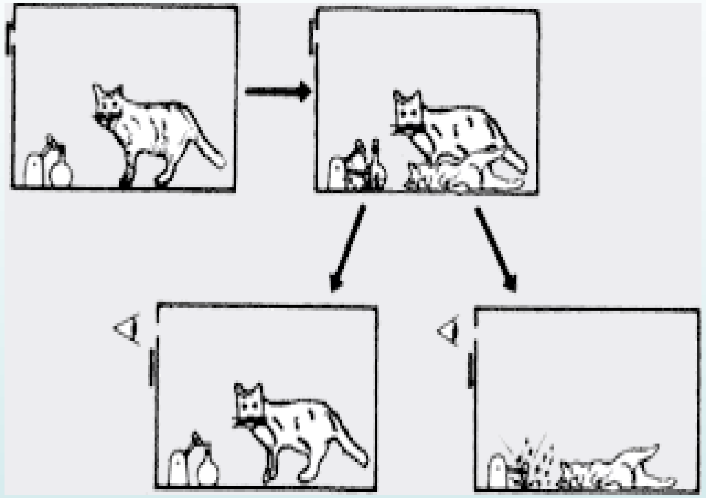
- Ungestörte Zeitentwicklung:

$$\left|\psi\right\rangle = a\left|tot\right\rangle\left|0\right\rangle + b\left|leben\right\rangle\left|1\right\rangle$$

- Die Katze ist gleichzeitig tot und lebendig.

$$\rho = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}$$

$$\left|0\right\rangle\left|tot\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left|1\right\rangle\left|leben\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



- Warum sehen wir die Katze nie gleichzeitig tot und lebendig?

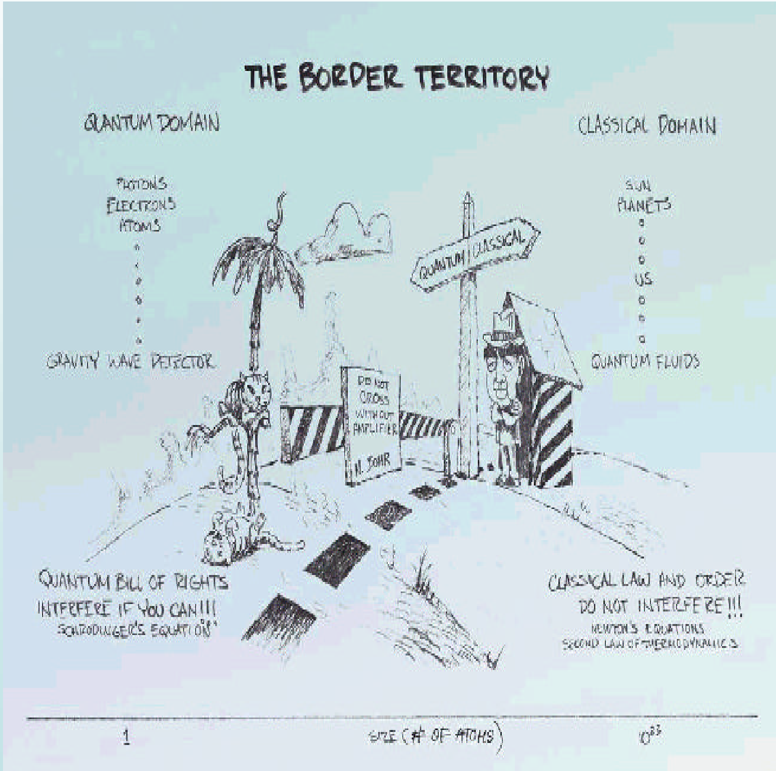
$$\rho^d = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}$$

- Kopplung an die Umgebung

Prof. H. Müller- Krumbhaar, Dr. E. Koch
Institut für Festkörperforschung, FZ Jülich

Das Problem der Messung

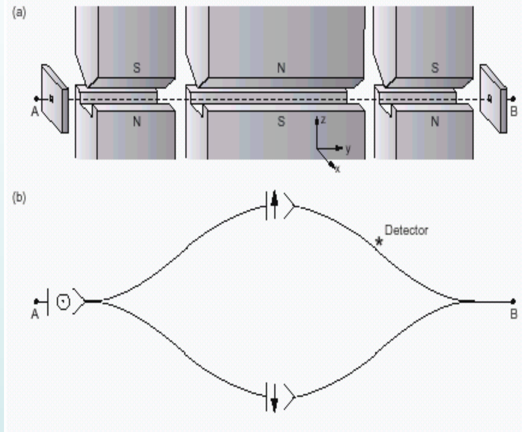
- Wieso sehe ich immer nur eine der Alternativen?
- Kopenhagen Interpretation (N. Bohr;1928)
  - Messung eines QM- Systems mit kl. Apparatur erzeugt Auswahl
  - Abgeschlossene Systeme gehorchen der Schrödinger Gl.; bei Messung Kollapse.
  - Es gibt eine Grenze
- Everett Interpretation (1957)
  - Schrödinger Gl. gilt immer.
  - Alle alternativen Ergebnisse Existieren gleichzeitig.
  - Das Bewusstsein nimmt nur einen Zweig war.



Modell einer QM- Messung

- 2 qubit Anordnung: QM- System mit QM- Messapparat

$$|\uparrow\rangle|A_{\uparrow\downarrow}\rangle \mapsto |\uparrow\rangle|A_{\downarrow\uparrow}\rangle \quad ; \quad |\downarrow\rangle|A_{\uparrow\downarrow}\rangle \mapsto |\downarrow\rangle|A_{\uparrow\downarrow}\rangle$$



- Anfangszustand:

$$|\phi^i\rangle = |\psi_S\rangle \otimes |A_\downarrow\rangle = \left[\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle\right] A_\downarrow\rangle$$

- korrelierter Endzustand:

$$|\phi^c\rangle = \alpha|\uparrow\rangle|A_\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle|A_\downarrow\rangle$$

- Dichtematrix:

$$\rho^c = |\phi^c\rangle\langle\phi^c| = |\alpha|^2|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |A_\uparrow\rangle\langle A_\uparrow| + \alpha\beta^* \,|\,|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\,|\otimes|A_\uparrow\rangle\langle A_\downarrow|$$

$$+ \alpha^*\beta|\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |A_\downarrow\rangle\langle A_\uparrow| + |\beta|^2|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |A_\downarrow\rangle\langle A_\downarrow|$$

- Postulat: Nicht unitärer „Prozess 1“ erzeugt diagonale Dichtematrix:

$$\rho^r = |\alpha|^2|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |A_\uparrow\rangle\langle A_\uparrow| + |\beta|^2|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |A_\downarrow\rangle\langle A_\downarrow|$$

Basis Unbestimmtheit ?!

- In der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$:

$$|\uparrow\rangle|A_{\uparrow\downarrow}\rangle \quad \mapsto \quad |\uparrow\rangle|A_{\downarrow\uparrow}\rangle \quad ; \quad |\downarrow\rangle|A_{\uparrow\downarrow}\rangle \quad \mapsto \quad |\downarrow\rangle|A_{\uparrow\downarrow}\rangle$$

- Konjugierte Basis:

$$|\pm\rangle = \left[|\downarrow\rangle \pm |\uparrow\rangle\right]/\sqrt{2} \quad ; \quad |A_{\pm}\rangle = \left[|A_{\downarrow}\rangle \pm |A_{\uparrow}\rangle\right]/\sqrt{2}$$

- Liefert:

$$\left[|\downarrow\rangle \pm |\uparrow\rangle\right] \otimes \left[|A_{\downarrow}\rangle - |A_{\uparrow}\rangle\right] = |\downarrow\rangle|A_{\downarrow}\rangle \mp |\uparrow\rangle|A_{\uparrow}\rangle - |\downarrow\rangle|A_{\uparrow}\rangle \pm |\uparrow\rangle|A_{\downarrow}\rangle$$

$$\mapsto \quad |\downarrow\rangle|A_{\downarrow}\rangle \mp |\uparrow\rangle|A_{\downarrow}\rangle - \left\{|\downarrow\rangle|A_{\uparrow}\rangle \mp |\uparrow\rangle|A_{\uparrow}\rangle\right\}$$

$$= \left[|\downarrow\rangle \mp |\uparrow\rangle\right] \otimes \left[|A_{\downarrow}\rangle - |A_{\uparrow}\rangle\right]$$

- Es ergibt sich eine konjugierte Wahrheitstabelle:

$$|\pm\rangle|A_{-}\rangle \quad \mapsto \quad |\mp\rangle|A_{-}\rangle; \quad |\pm\rangle|A_{+}\rangle \quad \mapsto \quad |\pm\rangle|A_{+}\rangle$$

Prof. H. Müller- Krumbhaar, Dr. E. Koch
Institut für Festkörperforschung, FZ Jülich

Ankopplung an die Umgebung: Dekohärenz

- 3 qubit Anordnung: System ***S***, Messapparatur ***A*** und Umgebung ***E***:

$$\left|\phi^c\right\rangle\left|E_1\right\rangle = \left[\alpha\left|\uparrow\right\rangle\left|A_\uparrow\right\rangle + \beta\left|\downarrow\right\rangle\left|A_\downarrow\right\rangle\right]\left|E_1\right\rangle$$

$$\mapsto \quad \left|\Psi\right\rangle = \alpha\left|\uparrow\right\rangle\left|A_\uparrow\right\rangle\left|E_2\right\rangle + \beta\left|\downarrow\right\rangle\left|A_\downarrow\right\rangle\left|E_1\right\rangle$$

- Wenn $\left\langle E_i \middle| E_j \right\rangle = \delta_{ij}$, dann ergibt sich die reduzierte Dichtematrix:

$$\rho_{AS} = Tr_E \left|\Psi\right\rangle\left\langle\Psi\right| = \sum_i \left\langle E_i \middle| \Psi\right\rangle\left\langle\Psi \middle| E_i\right\rangle$$

$$= \left|\alpha\right|^2 \left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| \otimes \left|A_\uparrow\right\rangle\left\langle A_\uparrow\right| \quad + \quad \left|\beta\right|^2 \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right| \otimes \left|A_\downarrow\right\rangle\left\langle A_\downarrow\right| = \rho^r$$

- Basis Wahl wird durch ***AE***- Wechselwirkung bestimmt:

$$\left[\Lambda, H_{\text{int}}\right] = 0$$

- Streuprobleme sind lokal $\Rightarrow$ Ortsbasis ausgezeichnet

Dekohärenz eines einzelnen Qubits

- Qubit $\{|\Uparrow\rangle ; |\Downarrow\rangle\}$ in Wechselwirkung mit einem Umgebungsspin $\{|\uparrow\rangle ; |\downarrow\rangle\}$:

$$H_{SE} = g\left(|\Uparrow\rangle\langle\Uparrow| - |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow|\right) \otimes \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$$

$$= \begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix} \quad mit \quad |\Uparrow\rangle|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\Uparrow\rangle|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\Downarrow\rangle|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\Downarrow\rangle|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Anfangszustand:

$$|\Phi(0)\rangle = (\alpha|\Uparrow\rangle + \beta|\Downarrow\rangle) \otimes (A|\uparrow\rangle + B|\downarrow\rangle)$$

$$= \alpha A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeitentwicklung:

$$|\Phi(t)\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_{SE}\, t\right\} |\Phi(0)\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}gt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{\hbar}gt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i}{\hbar}gt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}gt} \end{pmatrix} |\Phi(0)\rangle$$

Dekohärenz eines einzelnen Qubits

- Zeitentwicklung:

$$\left|\Phi(t)\right\rangle = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}gt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{\hbar}gt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{i}{\hbar}gt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}gt} \end{pmatrix} \left|\Phi(0)\right\rangle$$

$$= \alpha A e^{-\frac{i}{\hbar}gt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha B e^{\frac{i}{\hbar}gt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta A e^{\frac{i}{\hbar}gt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta B e^{-\frac{i}{\hbar}gt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha A e^{-\frac{i}{\hbar}gt} \left|\Uparrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle + \alpha B e^{\frac{i}{\hbar}gt} \left|\Uparrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle + \beta A e^{\frac{i}{\hbar}gt} \left|\Downarrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle + \beta B e^{-\frac{i}{\hbar}gt} \left|\Downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle$$

$$= \alpha \left|\Uparrow\right\rangle \underbrace{\left(A e^{-\frac{i}{\hbar}gt} \left|\uparrow\right\rangle + B e^{\frac{i}{\hbar}gt} \left|\downarrow\right\rangle \right)}_{\left|E_{\Uparrow}(t)\right\rangle} + \beta \left|\Downarrow\right\rangle \underbrace{\left(A e^{\frac{i}{\hbar}gt} \left|\uparrow\right\rangle + B e^{-\frac{i}{\hbar}gt} \left|\downarrow\right\rangle \right)}_{\left|E_{\Downarrow}(t)\right\rangle = \left|E_{\Uparrow}(-t)\right\rangle}$$

Prof. H. Müller- Krumbhaar, Dr. E. Koch
Institut für Festkörperforschung, FZ Jülich

Dekohärenz eines einzelnen Qubits

- Dichtematrix:

$$\rho = |\Phi(t)\rangle\langle\Phi(t)| = \left(\alpha|\Uparrow\rangle|E_\Uparrow\rangle + \beta|\Downarrow\rangle|E_\Downarrow\rangle\right)\left(\alpha^*\langle\Uparrow|\langle E_\Uparrow| + \beta^*\langle\Downarrow|\langle E_\Downarrow|\right)$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* & 0 & 0 \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ 0 & 0 & \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad mit \quad |\Uparrow\rangle|E_\Uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\Downarrow\rangle|E_\Downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Bilde zur Berechnung der reduzierten Dichtematrix:

$$\langle E_\Uparrow(t)|E_\Downarrow(t)\rangle = \left(A^* e^{\frac{i}{\hbar}gt}\langle\uparrow| + B^* e^{-\frac{i}{\hbar}gt}\langle\downarrow|\right)\left(A e^{\frac{i}{\hbar}gt}|\uparrow\rangle + B e^{-\frac{i}{\hbar}gt}|\downarrow\rangle\right)$$

$$= |A|^2 e^{\frac{i}{\hbar}2gt} + |B|^2 e^{-\frac{i}{\hbar}2gt} = r(t)$$

Dekohärenz eines einzelnen Qubits

- Reduzierte Dichtematrix:

$$\rho_S = tr_E(\rho) = \sum_i \langle E_i|\rho|E_i\rangle = \langle\uparrow|\rho|\uparrow\rangle + \langle\downarrow|\rho|\downarrow\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha^*\beta r^*(t) \\ \alpha\beta^* r(t) & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad mit \quad |\Uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad |\Downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Dabei gilt für r(t):

$$r(t) = |A|^2 e^{\frac{i}{\hbar}2gt} + |B|^2 e^{-\frac{i}{\hbar}2gt} = \cos\left(2\frac{g}{\hbar}t\right) + i\left[|A|^2 - |B|^2\right]\sin\left(2\frac{g}{\hbar}t\right)$$

- Der Betrag der Interferenzterme hat folgende Zeitabhängigkeit:

$$|r(t)|^2 = \cos^2\left(2\frac{g}{\hbar}t\right) + \left(|A|^2 - |B|^2\right)^2 \sin^2\left(2\frac{g}{\hbar}t\right)$$

- Periodische Zeitabhängigkeit: Poincaré'sche Wiederkehrzeit

Dekohärenz eines einzelnen Qubits im Spinbad

- Wechselwirkung des Qubits mit N Spins der Umgebung:

$$H_{SE} = (|\Uparrow\rangle\langle\Uparrow| - |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow|) \otimes \sum_k g_k (|\uparrow_k\rangle\langle\uparrow_k| - |\downarrow_k\rangle\langle\downarrow_k|) \otimes \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{N} I_i$$

- Anfangszustand:

$$|\Phi(0)\rangle = (\alpha|\Uparrow\rangle + \beta|\Downarrow\rangle)\prod_{k=1}^{N}(A_k|\uparrow_k\rangle + B_k|\downarrow_k\rangle)$$

- Zeitentwicklung des Zustandes:

$$|\Phi(t)\rangle = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} H_{SE}\, t\right\}|\Phi(0)\rangle = \alpha|\Uparrow\rangle|E_{\Uparrow}(t)\rangle + \beta|\Downarrow\rangle|E_{\Downarrow}(t)\rangle$$

$$|E_{\Uparrow}(t)\rangle = \prod_{k=1}^{N}\left(A_k e^{i g_k t}|\uparrow_k\rangle + B_k e^{-i g_k t}|\downarrow_k\rangle\right) = |E_{\Downarrow}(-t)\rangle$$

- Reduzierte Dichte-Matrix

$$\rho_S = |\alpha|^2 |\Uparrow\rangle\langle\Downarrow| + \alpha\beta^* \cdot r(t)|\Uparrow\rangle\langle\Downarrow| + \alpha^*\beta \cdot r^*(t)|\Downarrow\rangle\langle\Uparrow| + |\beta|^2 |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow|$$

$$wobei \qquad r(t) = \prod_{k=1}^{N} |A_k|^2 \exp\left\{\frac{i}{\hbar} 2 g_k t\right\} + |B_k|^2 \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} 2 g_k t\right\}$$

Prof. H. Müller- Krumbhaar, Dr. E. Koch
Institut für Festkörperforschung, FZ Jülich

Dekohärenz eines einzelnen Qubits im Spinbad

- Dekohärenz Dämpfung:

$$r(t) = \prod_{k=1}^{N} |A_k|^2 \exp\left\{\frac{i}{\hbar} 2 g_k t\right\} + |B_k|^2 \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} 2 g_k t\right\}$$

- Ausmultiplizieren ($|j\rangle = |\uparrow_1\rangle \otimes |\downarrow_2\rangle \cdots \otimes |\downarrow_N\rangle$ läuft über alle Spin-Kombin.):

$$r(t) = \sum_{j=1}^{2^N} p_j \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} 2\Delta\omega_j t\right\} \quad mit \quad p_j = \left|\langle j | E(t=0)\rangle\right|^2 \quad und \quad \Delta\omega = \langle \Uparrow | \langle j | H_{SE} | j \rangle | \Uparrow \rangle$$

- Wobei:

$$H_{SE} = (|\Uparrow\rangle\langle\Uparrow| - |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow|) \otimes \sum_k g_k (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)_k$$

$$E(0) = \prod_{k=1}^{N} \left(A_k |\uparrow_k\rangle + B_k |\downarrow_k\rangle\right)$$

- Zum Beispiel für k=2 (h=1):

$$r(t) = \left(A_1^2 e^{i2g_1 t} + B_1^2 e^{i2g_1 t}\right)\left(A_2^2 e^{i2g_2 t} + B_2^2 e^{i2g_2 t}\right)$$

$$= A_1^2 A_2^2 e^{i2(g_1+g_2)t} + A_1^2 B_2^2 e^{i2(g_1-g_2)t} + B_1^2 A_2^2 e^{-i2(g_1-g_2)t} + B_1^2 B_2^2 e^{-i2(g_1+g_2)t}$$

Dekohärenz eines einzelnen Qubits im Spinbad

- Darstellung der Dichtematrix aller Zustände eines Qubits durch die Bloch-Kugel:

$$\rho_S = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha^* \beta r^*(t) \\ \alpha\beta^* r(t) & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

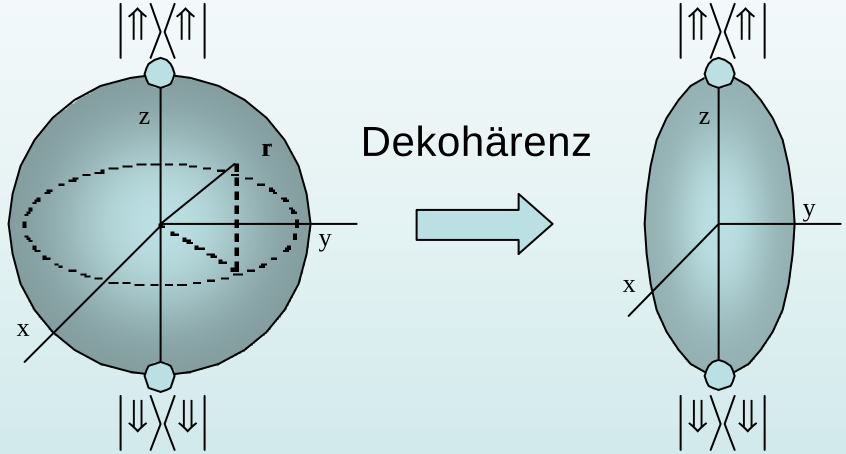
$$r(t) = \sum_{j=1}^{2^N} p_j \exp\left\{ -\frac{i}{\hbar} 2 \Delta\omega_j t \right\}$$

- Für große N ist r(t) klein, weil $\Delta\omega_j$ und p_j zufällig.
- Erwartungswert des Betrages:

$$\left\langle |r(t)|^2 \right\rangle = 2 \left\langle \sum_{i,j} p_i p_j \cos\left\{ \frac{t}{\hbar} (\omega_i - \omega_j) \right\} \right\rangle$$

$$= \sum_j^{2^N} p_j^2 = \prod_{k=1}^{N} \underbrace{(A_k^4 + B_k^4)}_{<1}$$

$$x = \mathrm{Re}\left(\alpha\beta^* r(t)\right); y = \mathrm{Im}\left(\alpha\beta^* r(t)\right); z = \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)$$



- Dekohärenz ist eine Kontraktion in der z = konst. Ebene.
- $|\Uparrow\rangle\langle\Uparrow|$ und $|\Downarrow\rangle\langle\Downarrow|$ sind invariant unter Dekohärenz.
- Dekohärenz ist exponentiell effektiv.

Klassischer Grenzfall der Quantenmechanik

- Dynamik: Zeitentwicklung der Objekte
  - Klass. Mechanik: Hamilton Gleichungen
  - QM: Schrödinger Gleichung
  - Dynamischer Grenzfall durch Ehrenfest Theorem erklärbar
- Kinematik: Beschreibung der Objekte
  - Klass. Mechanik: Massenpunkt im Phasenraum
  - QM: Wellenfunktion im Hilbertraum
  - Einsteins Frage nach der Lokalisierung:

  „Man muss sich schon wundern, dass eine Fliege die man zum ersten mal sieht, so etwas wie lokalisiert erscheint.“

  - Kinematischer Grenzfall durch Dekohärenz erklärbar.

Räumliche Lokalisierung durch Streuung

- Das Streuteilchen misst den Ort des Streuzentrums.

$$\left|Objekt\ am\ Ort\ x\right\rangle \otimes \left|einlaufendes\ Teilchen\right\rangle$$

$$\mapsto \left|Objekt\ am\ Ort\ x\right\rangle \otimes \left|Teilchen\ am\ Ort\ x\ gestreut\right\rangle$$

- In erster Näherung ohne Rückstoß:

$$\left|x\right\rangle\left|\Phi_0\right\rangle \quad \mapsto \quad \left|x\right\rangle\left|\Phi_x\right\rangle$$

- Bildung der reduzierten Dichtematrix:

$$\rho(x,x') \quad \mapsto \quad \rho(x,x')\cdot\left\langle\Phi_{x'}\middle\|\Phi_x\right\rangle \quad mit \quad \rho(x,x') = \left\langle x'\middle|\psi\right\rangle\left\langle\psi\middle|x\right\rangle$$

- ρ ~ Null, wenn die Wellenlänge λ kleiner als die Distanz |x-x´|:

$$\left\langle\Phi_{x'}\middle\|\Phi_x\right\rangle = \begin{cases} 0 & falls\quad \left|x-x'\right| >> \lambda \\ 1-O\left[(x-x')^2\right] & falls\quad \left|x-x'\right| << \lambda \end{cases}$$

- Viele Streuungen schlechter Auflösung (|x-x´| << λ):

$$\rho(x,x',t) = \rho(x,x',0)\cdot\exp\left\{-\Lambda t(x-x')^2\right\} \quad wobei \quad \underbrace{\Lambda \sim k^2\sigma_{eff}\ j}_{Lokalisierungsrate}$$

Räumliche Lokalisierung durch Streuung

- Lokalisierungsrate Λ [$cm^{-2}s^{-1}$]:

$$\Lambda = \frac{1}{8\pi^3} k^2 \sigma_{eff} \; j = \frac{1}{8\pi^3} k^2 \sigma_{eff} \; \frac{N\,v}{V}$$

- Dabei ist: k Wellenzahl, Nv/V Flussdichte der Streuteilchen und σ_{eff} von der Größenordnung des totalen Streuquerschnitts.
- *Das Auftreten von Interferenzen ist also eine quantitative Frage!*

	a = 10^{-3} cm Staubkorn	a = 10^{-5} cm Staubkorn	a = 10^{-6} cm Großes Molekül
Kosmische Hintergrundstrahlung	10^{6}	10^{-6}	10^{-12}
300K – Photonen	10^{19}	10^{12}	10^{6}
Sonnenlicht	10^{21}	10^{17}	10^{13}
Luftmoleküle	10^{36}	10^{32}	10^{30}
Laborvakuum	10^{21}	10^{19}	10^{17}

Bewegungsgleichungen unter dem Einfluss von Streuung

- Zeitliche Entwicklung der Dichtematrix eines Streuzentrums ist von Neuman Gleichung plus Zusatzterme für die Streuung:

$$i\frac{d\rho}{dt} = [H_{intern}, \rho] + \left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{Streuung}$$

- Freie Teilchen ($H_{intern} = p^2/2m$) ohne Rückstoß (h=1):

$$i\frac{d\rho(x,x',t)}{dt} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\rho - i\Lambda(x-x')^2\rho$$

- Mit Rückstoß („Quantum Brownian Motion")

$$i\frac{d\rho(x,x',t)}{dt} = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - i\Lambda(x-x')^2 + i\gamma(x-x')\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\rho(x,x',t)$$

- Verhältnis von Dekohärenz und Reibung

$$\frac{Dekohärenz}{Reibung} = \frac{\Lambda}{\gamma}\Delta x^2 \cong \frac{2mk_B T}{\hbar^2} = \left(\frac{\Delta x}{\lambda_{dB}}\right)^2 \quad \mapsto \quad 10^{40}$$

Bewegungsgleichungen unter dem Einfluss von Streuung

- Master Gleichung (hochtemperatur Grenzfall):

$$\frac{d\rho}{dt} = \underbrace{-\frac{i}{\hbar}[H,\rho]}_{von\ Neuman\ Gleichung} - \underbrace{\gamma(x-x')\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)\rho}_{Relaxation} - \underbrace{\Lambda(x-x')^2\rho}_{Dekoherenz}$$

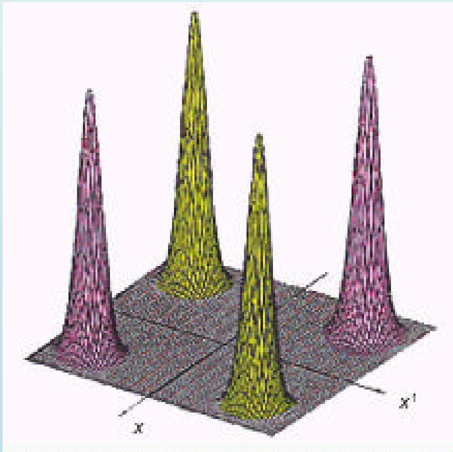
- Zwei Gaußpakete mit Abstand Δx und Breite dx: $\phi(x)=(\chi^+(x)+\chi(x))/2^{1/2}$

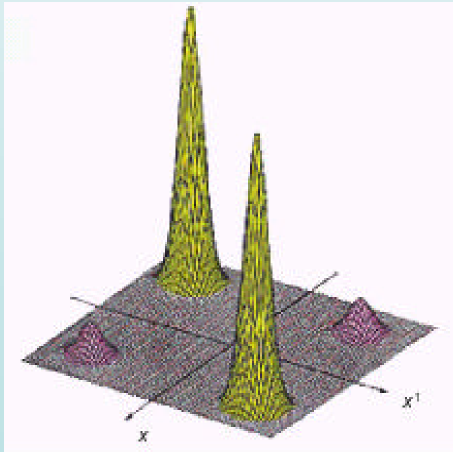
$$\rho(x,x') = \frac{1}{2}\left[\chi^-(x)\chi^+(x') + \chi^+(x)\chi^-(x') + \chi^+(x)\chi^+(x') + \chi^-(x)\chi^-(x')\right]$$

$$\chi^{\pm}(x) = \langle x|\pm\rangle \sim \exp\left\{-\frac{(x\pm\Delta x/2)}{4dx^2}\right\}$$

- Die nicht diagonal Terme von ρ zerfallen mit einer Rate τ_D^{-1}:

$$\frac{d\rho^{+-}}{dt} \sim \Lambda\rho^{+-}$$





Zusammenfassung

- Schrödingers Katze
  - Superpositionen sind unanschaulich
- Das Problem der Messung
  - Warum sieht man nur eine der Alternativen?
- Modell einer QM- Messung
  - Die Wechselwirkung mit der Umgebung bestimmt die Messbasis.
- Dekohärenz eines einzelnen Qubits
  - Dekohärenz verstört Superpositionen exponentiell effektiv
- Klassischer Grenzfall der Quanten Mechanik
  - Unter Einwirkung von Dekohärenz wird aus dem Hilbertraum der sehr viel kleinere kl. Phasenraum.