Seminar Quanten-Computing

RWTH-Aachen, SS 2004/2005

Seminar Quanten-Computing

Grundlagen der Quantenmechanik

Patrick González 214637

2. Juni 2005

Inhalt

Quantenmechanische Grundpostulate

Zur Erinnerung:

1. Zu jedem physikalischen System korrespondiert ein Hilbertraum; die physikalischen Zustände des Systems werden beschrieben durch Einheitsvektoren in diesem Hilbertraum.

2. Zu jeder dynamischen Variablen A des Systems korrespondiert, eindeutig, ein linearer selbst-adjungierter Operator $\hat{A}$.

3. Die einzig möglichen Ergebnisse einer exakten Messung von A sind die Werte aus dem Spektrum von $\hat{A}$ (die Eigenwerte).

4. Wenn das System in einem Zustand $|\psi\rangle$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von A den Eigenwert a_i (zum Zustand $|a_i\rangle$) zu finden gleich;

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}(a_i) &= \langle\psi|P_{a_i}|\psi\rangle = \langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle \\ &= |\langle a_i|\psi\rangle|^2. \end{aligned}$$

5. Die Zeitentwicklung eines abgeschlossenen Systems gehorcht

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t-t_0)|\psi(0)\rangle.$$

für einen unitären Operator $\hat{U}$.

6. Wenn eine Messung der dynamischen Variablen A des Systems, das im Zustand $|\psi\rangle$ ist, der Eigenwert a_i des zugehörigen Operators $\hat{A}$ liefert, dann ist das System direkt nach der Messung in dem Eigenzustand

$$|\psi\rangle \rightsquigarrow \frac{P_{a_i}|\psi\rangle}{||P_{a_i}|\psi\rangle||}$$

Die Heisenberg'sche Unschärferelation

Zwei mögliche Zugänge:

1. Gegeben: Zwei selbst-adjungierte Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ mit:

   $$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar.$$

   Definition:

   $$(\Delta A)^2 = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$$

   Definiere:

   $$\begin{aligned} \hat{A}' &= \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \\ \Rightarrow \quad \langle (\hat{A}')^2 \rangle &= (\Delta A)^2 \end{aligned}$$

   Definiere:

   $$\hat{C} = \hat{A}' + i\lambda \hat{B}', \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   $$\begin{aligned} \Rightarrow f(\lambda) \equiv \langle \hat{C}\hat{C}^\dagger \rangle &= \langle (\hat{A}' + i\lambda \hat{B}')(\hat{A}' - i\lambda \hat{B}') \rangle \\ &= (\Delta A)^2 + \lambda^2 (\Delta B)^2 + \lambda\hbar. \end{aligned}$$

   $f(\lambda)$ hat Minimum bei

   $$\lambda_0 = -\frac{\hbar}{2(\Delta B)^2}$$

   $$\begin{aligned} \Rightarrow \ f(\lambda_0) &= (\Delta A)^2 - \frac{\hbar^2}{4(\Delta B)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \ (\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

2. (**Die Wellenfunktion**)
   Betrachte:

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x\psi + \lambda\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx = \langle x^2 \rangle - \lambda\hbar + \lambda^2 \langle p^2 \rangle$$

   Analog erhält man:

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar}{2} \tag{0.2}$$

Interpretation der Heisenberg'sche Unschärferelation?

- Betrachte ein Ensemble von gleich präparierten Systemen die alle im Zustand $|\psi\rangle$ sind. Wenn wir bei einigen Systemen die dynamische Variable A messen, und bei einigen Systemen die Variable B messen, wird das Produkt der Streuungen gleich (0.1) sein. Es is nicht so, daß eine Messung der Variable A die Messergebnisse der Messung von B in eine Weise stört sodaß (0.1) erfült ist.

- Es ist nicht möglich, ein System zu präparieren sodaß der Zustand $|\psi\rangle$ des Systems gleichzeitig ein Eigenzustand des Operators $\hat{A}$ und des Operators $\hat{B}$ ist.

- Annahme: $\langle x^2\rangle\langle p^2\rangle \leq \frac{\hbar}{2}$. Dann muß folgern daß es keine Wellenfunktion ψ geben kann die das System beschreibt.

Verschränktheit

Mathematische Grundlagen: Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ zweier Hilberträume $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$.

1. $\big(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle\big) \otimes |\chi\rangle = \alpha|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle + \beta|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$
2. $|\psi\rangle \otimes \big(\alpha|\phi\rangle + \beta|\chi\rangle\big) = |\psi\rangle \otimes \alpha|\phi\rangle + |\psi\rangle \otimes \beta|\chi\rangle$
3. Sei $|x\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ und $|y\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$. Dann ist
$$\langle x|y\rangle = \langle \psi_1|\phi_1\rangle \cdot \langle \psi_2|\phi_2\rangle$$
4. Sei $\hat{A}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}_1$ und sei $\hat{B}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}_2$. Dann ist:
$$\big(\hat{A} \otimes \hat{B}\big)|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle := \big(\hat{A}|\psi_1\rangle\big) \otimes \big(\hat{B}|\psi_2\rangle\big)$$

Notation: $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle := |\psi\rangle|\phi\rangle$.

Verschränktheit:
Verschränktheit ist die Tatsache, daß es Vektoren (Zustände) in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ gibt die nicht geschrieben werden können als Produkt zweier Vektoren $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_2$ und die deshalb nicht mit einzelnen Zuständen der Subsyteme identifiziert werden können.

Wir werden oft Qubits und verschränkte Qubits als Beispiel verwenden.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In dieser Darstellung ist:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c \\ a \cdot d \\ b \cdot c \\ b \cdot d \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Operatoren: (CNOT und Hadamard)

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Weitere wichtige Operatoren (Pauli Spin-Matrizen)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:
Zwei Qubits-System im sog. EPR-Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\big)$$

Frage: Ist $|\psi\rangle$ als Tensorprodukt zweier Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ zu schreiben?
Sei

$$|a\rangle = a_1|0\rangle + a_2|1\rangle, \qquad |b\rangle = b_1|0\rangle + b_2|1\rangle.$$

Dann ist

$$|a\rangle|b\rangle = a_1b_1|0\rangle|0\rangle + a_2b_1|1\rangle|0\rangle + a_1b_2|0\rangle|1\rangle + a_2b_2|1\rangle|1\rangle$$

Koeffizientenvergleich:

$$a_2b_1 = 0 \text{ und } a_1b_2 = 0 \Rightarrow a_1b_1 = 0 \text{ und } a_2b_2 = 0$$

$\Rightarrow$ $|\psi\rangle$ ist nicht als Tensorprodukt zweier Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$ zu schreiben!

Beispiel: (Theorie der Messung)

- System: Zusammensetzung mikroskopisches spin-$\frac{1}{2}$ System und makroskopisches Messgerät.

- Eigenzustände des spin-$\frac{1}{2}$ Systems sind die Eigenzustände des $\hat{S}_z$ Operators: $|0\rangle$,$|1\rangle$.

$$\hat{S}_z|0\rangle = +\frac{\hbar}{2}|0\rangle, \ \hat{S}_z|1\rangle = -\frac{\hbar}{2}|1\rangle.$$

  Das Messgerät kennt drei mögliche “Anzeigerzustände”: $|A_0\rangle, |A_\uparrow\rangle, |A_\downarrow\rangle$.

- Ensemble des zusammengesetzten Systems im Zustand $|A_0\rangle|0\rangle$.

- Entwicklung des Systems in der Zeit:

$$|A_0\rangle|0\rangle \rightarrow |A_\uparrow\rangle|0\rangle$$

  analog

$$|A_0\rangle|1\rangle \rightarrow |A_\downarrow\rangle|1\rangle$$

- Betrachte wieder Ensemble, nun im Anfangszustand: $|A_0\rangle\big(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\big)$. Wichtig: Spin-Zustand ist kein Eigenzustand des Operators $\hat{S}_z$.

- Zeitentwicklung:

$$|A_0\rangle\big(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\big) \rightarrow \alpha|A_\uparrow\rangle|0\rangle + \beta|A_\downarrow\rangle|1\rangle$$

Beispiel: (Der reduzierte Dichteoperator und Verschränktheit)
Definition: (Dichteoperator)

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Wichtig:

$$\mathrm{tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1$$

Gleichheit dann und nur dann wenn System im reinen Zustand ist.

- Betrachte Gesamtsyteme aus Teilsystemen A und B mit Dichteoperator $\hat{\rho}^{AB}$.
- Definition: (reduzierte Dichteoperator)

$$\hat{\rho}^A := \mathrm{tr}_B(\hat{\rho}^{AB})$$

wobei

$$\mathrm{tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) := |a_1\rangle\langle a_2| \cdot \mathrm{tr}(|b_1\rangle\langle b_2|)$$

- Betrachte Zwei Qubitsystem (EPR-Paar) im verschränkten Zustand $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\big)$. Dann ist:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 0|\langle 0| + \langle 1|\langle 1|\big) \\ &= \frac{|0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0| + |1\rangle|1\rangle\langle 0|\langle 0| + |0\rangle|0\rangle\langle 1|\langle 1| + |1\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 1|}{2}\end{aligned}$$

Reduzierter Dichteopertor für das erste Qubit ist gleich (Benutze: $\mathrm{tr}(|a_1\rangle\langle a_2|) = \langle a_2|a_1\rangle$)

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^A &= \mathrm{tr}_B(\rho) \\ &= \frac{\mathrm{tr}(|0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0|) + \mathrm{tr}(|1\rangle|1\rangle\langle 0|\langle 0|) + \mathrm{tr}(|0\rangle|0\rangle\langle 1|\langle 1|) + \mathrm{tr}(|1\rangle|1\rangle\langle 1|\langle 1|)}{2} \\ &= \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} \\ &= \frac{I}{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{tr}((\hat{\rho}^A)^2) = \frac{1}{2} < 1$$

Vergleiche mit Produktzustand $|0\rangle|0\rangle$:

$$\hat{\rho}^{AB} = |0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0| \Rightarrow \hat{\rho}^{A} = \mathrm{tr}_B(|0\rangle|0\rangle\langle 0|\langle 0|) = |0\rangle\langle 0|.$$

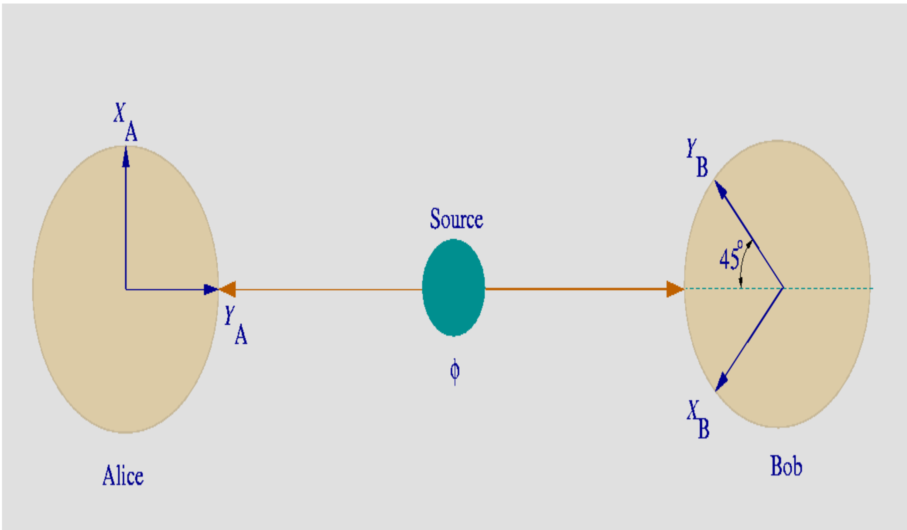
Es folgt sofort: $\mathrm{tr}((\hat{\rho}^A)^2) = 1$! Klar, Produktzustand ist Tensorprodukt (nicht verschränkt) zweier reinen Zustände!

Das EPR-Argument

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

> "*If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e. with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity.*"
>
> "*Every element of the physical reality must have a counterpart in the physical theory*"

Einstein, Podolsky, Rosen 1935



Die Argumentation

1. - Verschränkte Qubit-Zustände (historisch “spin-singlet”):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\big)$$

   - Alice:
      i. Messung des ersten Qubits bezüglich der z-Achse.
      ii. Annahme: Messwert $+1$. System ist dann im Zustand $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$.
      iii. Falls Bob eine Messung um die z-Achse machen wird findet er mit Sicherheit -1

2. - Messungen bezüglich der x-Achse. Zustand des Systems:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle - |\leftarrow\rangle|\rightarrow\rangle\big)$$

   - Alice:
      i. Messung des ersten Qubits bezüglich der x-Achse.
      ii. Annahme: Messwert $+1$. System ist dann im Zustand $|\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle$.
      iii. Falls Bob eine Messung um die x-Achse machen wird findet er mit Sicherheit -1

Analyse

- Alice mißt ihr Qubit bzgl. z-Achse. Bob kann mit Sicherheit das Ergebnis seiner Messung vorhersagen. Ergebnis Bobs ist ein Element der Realität.

- Alice mißt ihres Qubit bzgl. x-Achse. Bob kann mit Sicherheit das Ergebnis seiner Messung vorhersagen

- Ohne Bobs Qubit zu stören können wir die Ergebnisse vorhersagen. Spin in z- und x-Richtung von Bobs Qubit sind beide Elementen der Realität.

- Aber: $[\hat{S}_z^{\text{Bob}}, \hat{S}_x^{\text{Bob}}] = -i\hat{S}_y^{\text{Bob}}$.

- Operatoren kommutieren nicht: es kann keine wohldefinierte Spins in den betrachteten Richtungen geben!

- EPR folgern: Falls QM vollständig, x-spin und z-spin von Bob sind nicht gleichzeitig Elementen der Realität.

- möglicher Ausweg: Messung Alice beeinflußt Messung Bob. Verletzung der Separabilität (Lokalität).

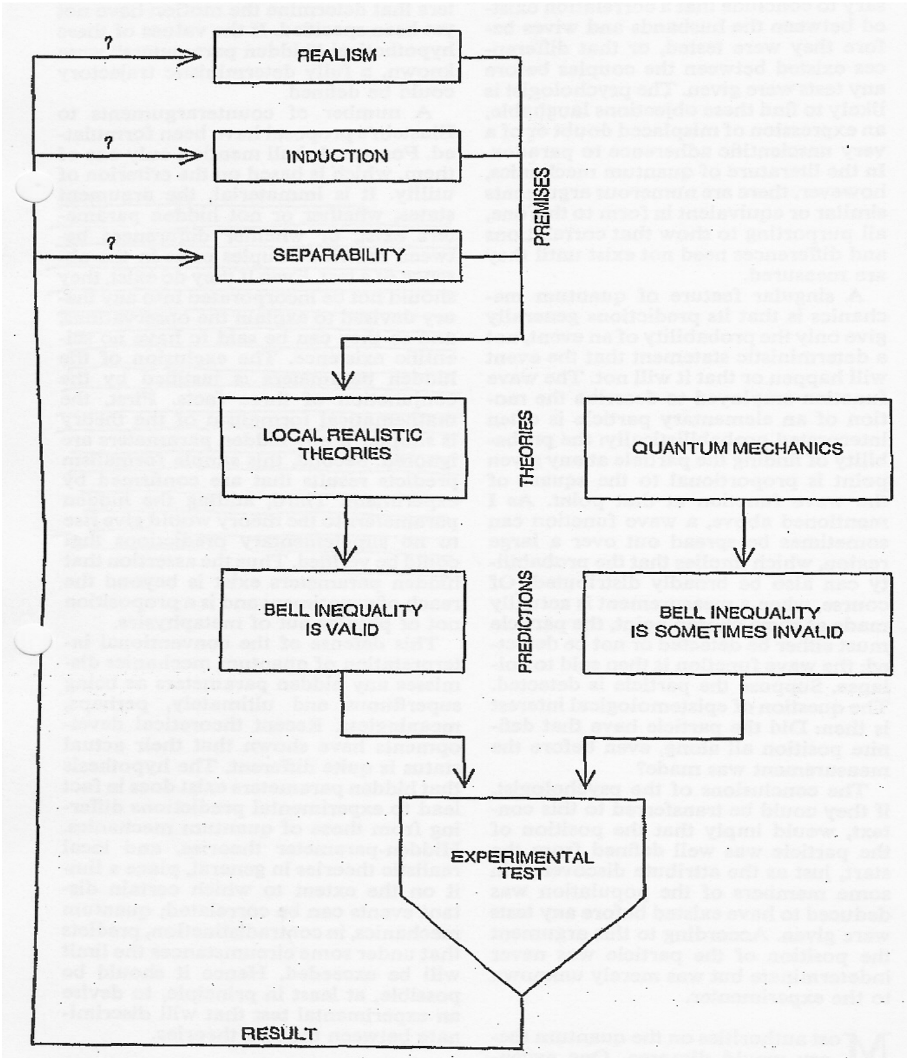
- EPR: Separabilität darf nicht verletzt werden $\Rightarrow$ QM ist nicht komplett!

- Oder; Lokalität wird verletzt, aber QM ist komplett.

Die Bell'sche Ungleichungen

Was soll einer physikalischen Theorie zugrundeliegen?

- Realismus
- Induktion
- Separabilität (oder Lokalität)

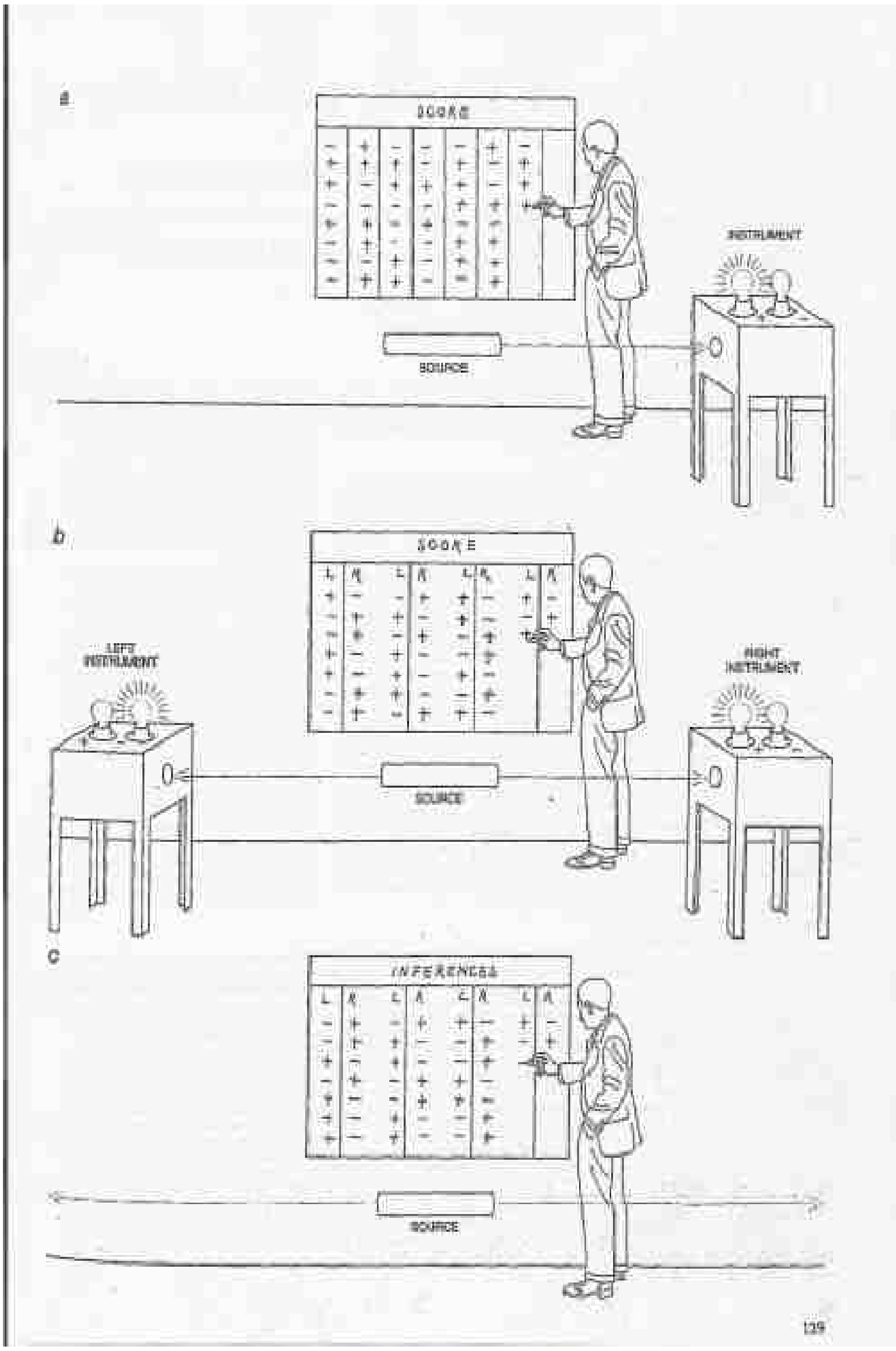


Grundannahmen einer Theorie

- **Realismus:** Regularities in observed phenomena are caused by some physical reality whose existence is independent of human observation.

- **Induktion:** Inductive inference is a valid mode of reasoning and can be applied freely, so that legitimate conclusions can be drawn from observed phenomena. In an inductive inference we form a conclusion regarding unobserved events based on the evidence provided by observed events.

- **Separabilität (Lokalität):** No influence of any kind can propagate faster than light.


a
SCORE
INSTRUMENT
SOURCE
b
SCORE
LEFT INSTRUMENT
RIGHT INSTRUMENT
SOURCE
c
INFERENCES
SOURCE
129

Erklärung des Experimente

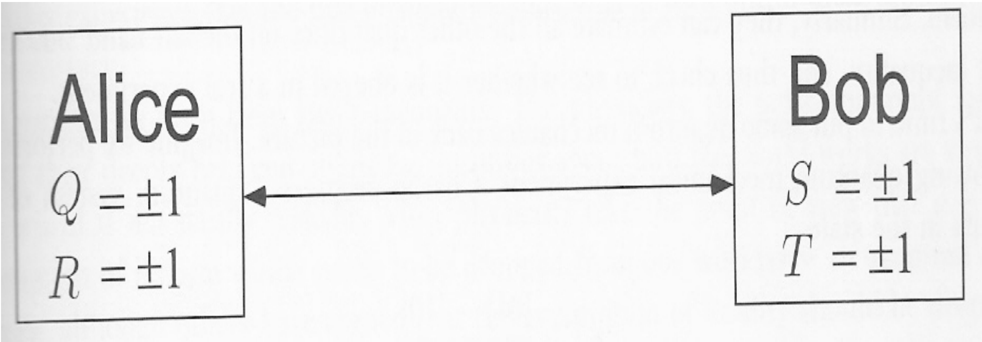
(a) - Teilchen werden auf Messgerät geschossen, mögliche Ergebnisse ± 1. Ergebnisse zeigen kein Muster. Zufällige Fluktuationen oder Messung einer Eigenschaft des Teilchens.

(b) - Teilchenpaaren werden präpariert. Zweites (identisches) Messgerät aufgestellt.

- Ergebnisse: strikt negativ korreliert. Falls linke Teilchen $+1$ ergibt, rechte Teilchen -1. vice versa.

(c) - Physiker: es wird eine (reelle) Eigenschaft der Teilchen gemessen, die Teilchen besitzen eine gewissen Eigenschaft die sie bereits vor der Messung haben müssen. Schlußfolgerung: jedes Teilchenpaar enthält ein + und ein - Teilchen.

Die Bell'sche Ungleichungen



Betrachte:

$$G := QS + RS + RT - QT$$
$$\Rightarrow G = \pm 2$$

Sei $p(q, r, s, t)$ Wahrscheinlichkeit daß $Q = q, R = r$ usw.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{E}(QS + RS + RT - QT) &= \sum_{qrst} p(q, r, s, t) \cdot (pq + rs + rt - qt) \\ &\leq \sum_{qrst} p(q, r, s, t) \cdot 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\mathbb{E}(QS) + \mathbb{E}(RS) + \mathbb{E}(RT) - \mathbb{E}(QT) \leq 2 \tag{0.3}$$

Gleichung (0.3) ist die berühmte Bell'sche Ungleichung.

Erklärung des Bell-Experiments

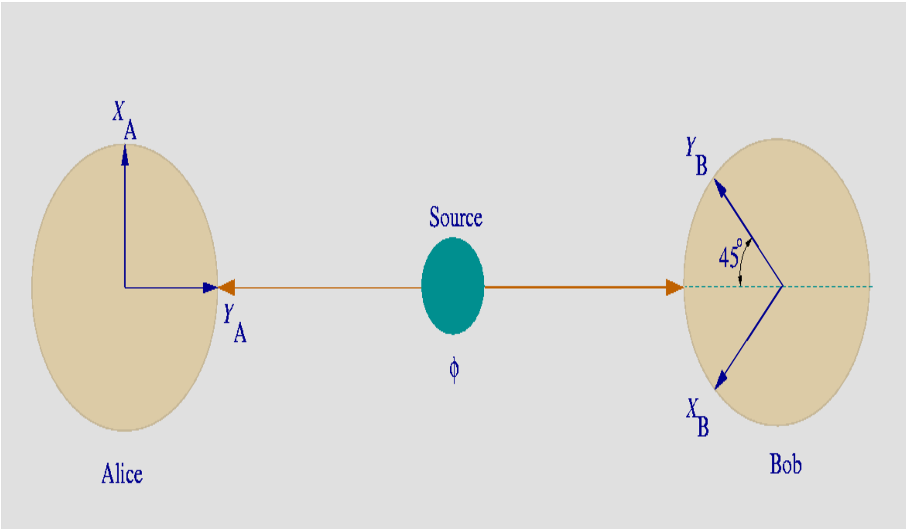
Wichtig: Quasigedankenexperiment

- Zwei Teilchen werden präpariert (wiederholbar) Ein Teilchen nach Alice, andere nach Bob.
- Alice kann (physikalische Eigenschaften) P_Q, P_R messen mit $Q = \pm 1, R = \pm 1$.
- Bob kann (physikalische Eigenschaften) P_S, P_T messen mit $S = \pm 1, T = \pm 1$.
- Alice/Bob entscheidet (willkürlich) welche physikalische Eigenschaft er messen will.

Die Quantenmechanik

Jetzt zur Quantenmechanik! Messung an einem Qubit-Paar im singlet Zustand (verschränkt!)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle\big)$$



Messung der Observablen:

$$Q = Z_A \qquad S = \frac{-Z_B - X_B}{\sqrt{2}}$$
$$R = X_A \qquad T = \frac{Z_B - X_B}{\sqrt{2}}$$

Rechnung:

$$\langle QS\rangle = \langle\psi|\hat{Z}_A\tfrac{-\hat{Z}_B-\hat{X}_B}{\sqrt{2}}|\psi\rangle = \ldots = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \langle RS\rangle = \langle RT\rangle$$
$$\langle QT\rangle = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \langle QS\rangle + \langle RS\rangle + \langle RT\rangle - \langle QT\rangle = 2\sqrt{2}$$

Greenberger-Horne-Zeilinger Zustände

Betrachte drei Qubits im GHZ-Zustand:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle|1\rangle\big)$$

Betrachte folgende Operatoren:

$$\begin{gathered}\hat{Y}_1 \otimes \hat{Y}_2 \otimes \hat{X}_3 \\ \hat{X}_1 \otimes \hat{Y}_2 \otimes \hat{Y}_3 \\ \hat{Y}_1 \otimes \hat{X}_2 \otimes \hat{Y}_3\end{gathered}$$

$\Rightarrow |\psi\rangle$ ist Eigenzustand aller drei Operatoren mit Eigenwert +1

$$\hat{X}_1 \otimes \hat{X}_2 \otimes \hat{X}_3$$

$\Rightarrow |\psi\rangle$ ist Eigenzustand mit Eigenwert -1

Experiment: 3 Messgeräte A, B, C in verschiedenen Positionen, weit voneinander entfernt.
$A_{x,y}$ ist Ergebnis Messung Spins ersten Teilchens bzgl. x- oder y-Achse usw. Aus obige Überlegungen folgt:

$$A_y B_y C_x = 1,\ A_x B_y C_y = 1,\ A_y B_x C_y = 1$$

$$\Rightarrow A_x B_x C_x = 1$$

Das “No-Cloning-Theorem”

Frage: Ist es möglich ein unbekanntes Qubit zu kopieren?

Antwort: Nein!

Beweis
Sei $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{orig} \otimes \mathcal{H}_{copy}$ und sei $\hat{U}_{QCM}$ der unitäre Operator die das kopieren in $\mathcal{H}$ entsprechen soll:

$$\hat{U}_{QCM}|\psi\rangle_{orig}|\phi\rangle_{copy} = |\psi\rangle_{orig}|\psi\rangle_{copy}$$

Sei nun $|\psi\rangle_{orig} = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$. Dann ist einerseits (wegen der Linearität des unitären Operators)

$$\begin{aligned} \hat{U}_{QCM}|\psi\rangle_{orig}|\phi\rangle &= \alpha\hat{U}_{QCM}|0\rangle|\psi\rangle + \beta\hat{U}_{QCM}|1\rangle|\psi\rangle \\ &= \alpha|0\rangle|0\rangle + \beta|1\rangle|1\rangle \end{aligned} \tag{0.4}$$

und andererseits wegen der Definition des Operators $\hat{U}_{QCM}$:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{QCM}|\psi\rangle|\phi\rangle &= |\psi\rangle|\psi\rangle \\ &= \alpha^2|0\rangle|0\rangle + \alpha\beta|0\rangle|1\rangle + \beta\alpha|1\rangle|0\rangle + \beta^2|1\rangle|1\rangle \end{aligned} \tag{0.5}$$

Koeffizientenvergleich von (0.4) und (0.5) zeigt daß es keinen unitären Operator $\hat{U}_{QCM}$ geben kann.

Kann man ein klassisches Bit kopieren? Ja, wähle $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ sodaß Gleichung (0.4) und (0.5) erfült sein.

Teleportation

Ziel: übertragen eines Quantenzustandes Qubits mittels klassischen Bits und herstellen dieses Zustandes am Empfänger.

Methode:

- Alice hat 2 Qubits: $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ und eines aus dem Zustand $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\big)$.
- Bob hat das andere Qubit aus dem Zustand $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle\big)$.
- Ausgangszustand:

$$|\psi\rangle|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(a|0\rangle|0\rangle|0\rangle + a|0\rangle|1\rangle|1\rangle + b|1\rangle|0\rangle|0\rangle + b|1\rangle|1\rangle|1\rangle\big)$$

- Alice macht einmal "controlled-not" auf den ersten zwei Qubits und einmal "Hadamard" auf den ersten Qubit:

$$\begin{aligned}(\mathrm{HCNOT})|\psi\rangle|\psi_0\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|0\rangle|0\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |0\rangle|1\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle) \\ &+ |1\rangle|0\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) + |1\rangle|1\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)\Big)\end{aligned}$$

- Alice mißt erste zwei Qubits, erhält 4 mögliche Ergebnisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Bobs Qubit wird auf entsprechenden Zustand projeziert.
- Alice schickt Ergebnis als zwei klassische Bits nach Bob

- Bob macht folgende Transformation auf seinem Qubit um den Zustand $|\psi\rangle$ zu rekonstruieren.

Bits empfangen	Zustand	Transformation
00	$a\|0\rangle + b\|1\rangle$	I
01	$a\|1\rangle + b\|0\rangle$	X
10	$a\|0\rangle - b\|1\rangle$	Y
11	$a\|1\rangle - b\|0\rangle$	Z